РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ ИМ. В.А. СТЕКЛОВА
РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЯ

ВЫПУСК 4

Том 62

ОКТЯБРЬ—НОЯБРЬ—ДЕКАБРЬ

Журнал основан А. Н. Колмогоровым в январе 1956 года
Выходит 4 раза в год

МОСКВА · 2017

Том 62 ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЯ Выпуск 4
2017

ТЕЗИСЫ ДОКЛАДОВ, ПРЕДСТАВЛЕННЫХ НА ВТОРОЙ МЕЖДУНАРОДНОЙ КОНФЕРЕНЦИИ ПО СТОХАСТИЧЕСКИМ МЕТОДАМ

С 25 по 31 мая 2017 г. состоялась Вторая Международная конференция по стохастическим методам (МКСМ-2). Она проходила в том же месте, что и первая конференция (МКСМ-1) 2016 г.: в пансионате «Моряк» недалеко от поселка Абрау-Дюрсо (район Новороссийска). Организаторами нынешней конференции (как и прошлогодней) стали Математический институт им. В. А. Стеклова РАН (отдел теории вероятностей и математической статистики), Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова (кафедра теории вероятностей) и опорный вуз г. Ростова-на-Дону — Донской государственный технический университет (ДГТУ, кафедра высшей математики). Руководил работой конференции председатель Оргкомитета и Программного комитета академик РАН А. Н. Ширяев.

Комитеты конференции работали в следующем составе: **организационный комитет** — И. В. Павлов (зам. председателя), Е. В. Бурнаев, М. В. Житлухин, В. В. Шамраева, С. Я. Шатских; **программный комитет** — А. А. Гущин (зам. председателя), Ю. Е. Гликлих, Д. Б. Рохлин. Технические вопросы на конференции решались **локальным оргкомитетом** в составе: И. В. Павлов (председатель), В. В. Шамраева, С. И. Углич, Н. П. Красий.

В конференции кроме российских ученых приняли участие представители Великобритании, Швеции, Болгарии, Франции, США, Узбекистана. Всего было сделано 13 пленарных и 41 секционных докладов. Темы пленарных докладов: *Ширяев А. Н.* (совм. с *Файнбергом Е. А.*) О прямых и обратных уравнениях Колмогорова общих скачкообразных марковских процессов; *Пиуновский А. Б.* О стратегиях в управляемых скачкообразных марковских процессах; *Гущин А. А.* Совместное распределение терминальных значений неотрицательного субмартингала и его компенсатора; *Гликлих Ю. Е.* Стохастические уравнения и включения с производными в среднем и их приложения; *Рохлин Д. Б.* Центральная предельная теорема при наличии неопределенности и задача предсказания с использованием экспертных стратегий; *Насыров Ф. С.* О представлении решений волновых уравнений в виде математических ожиданий; *Задорожний В. Г.* О моментных функциях решений мультипликативно возмущенных случайным шумом дифференциальных уравнений; *Лыков А. А.*

DOI: https://doi.org/10.4213/tvp5151

(совм. с *Малышевым В. А.*) Насколько неравновесная статистическая физика статистична; *Павлов И. В.* Интерполяционные мартингальные меры и хааровские расширения финансовых рынков; *Шатских С. Я.* (совм. с *Мелкумовой Л. Э.*) Метод максимального правдоподобия в теореме де Финетти; *Кудрявцев О. Е.* Численные методы оценки ликвидности в моделях, допускающих скачки; *Белопольская Я. И.* Вероятностные представления решения задачи Коши для параболических систем с кросс-диффузией; *Смородина Н. В.* Представление решений начально-краевых задач средними значениями функционалов от отражающихся от границы процессов.

Председательствовали на секциях и пленарных заседаниях: А. А. Гущин, С. Я. Шатских, Ф. С. Насыров, Э. Л. Пресман, В. Г. Задорожний, С. М. Ситник, И. В. Цветкова, В. В. Шамраева, А. В. Никитина, Ю. Е. Гликлих, О. Е. Кудрявцев, В. В. Родоченко, Л. Э. Мелкумова.

По сравнению с МКСМ-1 на МКСМ-2 отмечен рост уровня по всем показателям: по количеству докладчиков и научному уровню докладов (в МКСМ-2 приняли участие один академик РАН, 22 доктора наук, 20 кандидатов наук, 7 аспирантов), по организации приезда-отъезда участников, по предоставленным удобствам при проведении докладов. Тезисы докладов, прошедших рецензию, печатаются ниже.

Локальным оргкомитетом была организована экскурсия в пос. Дивноморское, где в спортивно-оздоровительном комплексе ДГТУ «Радуга» был проведен ряд пленарных и секционных докладов.

Успешному проведению конференции способствовала финансовая помощь ДГТУ (ректор Б. Ч. Месхи) и РФФИ (грант № 17-01-20079-г).

Следующую, 3-ю Международную конференцию по стохастическим методам намечено провести в начале июня 2018 г. в спортивно-оздоровительном комплексе ДГТУ «Радуга».

А. Н. Ширяев, И. В. Павлов, Т. Б. Толозова, В. В. Шамраева

Ниже публикуются тезисы докладов и сообщений участников конференции.

Аркин В. И., Сластников А. Д. (Москва, Россия)**. Пороговые стратегии в задаче оптимальной остановки диффузионных процессов Ито**[1]**.**

Задан одномерный регулярный диффузионный процесс Ито X_t, $t \geqslant 0$, $X_0 = x$, со значениями в интервале I с граничными точками l, r, которые могут как входить, так и не входить в интервал. Рассматривается задача оптимальной остановки $\mathbf{E}^x g(X_\tau) e^{-\rho\tau} \chi_{\{\tau<\infty\}} \to \max$, где максимум берется по некоторому классу марковских моментов τ (необязательно конечных п.н.).

Если известна структура решения (например, момент первого выхода процесса за некоторый уровень), то конкретный вид оптимального момента остановки можно искать в более узком классе марковских моментов (что гораздо проще), а затем доказывать его оптимальность среди всех марковских моментов. Возникает общая проблема: при каких условиях момент остановки, оптимальный в некотором классе моментов, будет оптимальным и среди всех марковских моментов?

[1] Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 15-06-03723).

В данной работе эта проблема решается для классов моментов остановки, определяемых одним и двумя порогами: $\tau_p = \inf\{t \geqslant 0\colon X_t \geqslant p\}$ и $\tau_{(a,b)} = \inf\{t \geqslant 0\colon X_t \notin (a,b)\}$ соответственно.

Пусть τ_{p^*} — оптимальный момент остановки в классе $\mathscr{M}_1 = \{\tau_p,\, l < p < r\}$ для всех x, $l < x < r$. Тогда τ_{p^*} будет оптимальным моментом остановки по всем марковским моментам (для всех x, $l < x < r$) в том и только том случае, когда функция выплат g является ρ-эксцессивной для процесса $X_{t\wedge\tau_{(p^*,r)}}$, $t \geqslant 0$, с начальным состоянием x, $p^* < x < r$.

Аналогичный результат справедлив и для момента $\tau_{(a^*,b^*)}$, оптимального в классе марковских моментов $\mathscr{M}_2 = \{\tau_{(a,b)},\, l < a < b < r\}$.

Выписываются условия оптимальности момента остановки в классе $\mathscr{M}_1$, а также условия ρ-эксцессивности функции.

Асылгареев А. С. (Уфа, Россия)**. Потраекторные теоремы сравнения для стохастических дифференциальных уравнений и их применения.**

Рассматриваются два СДУ с интегралом Стратоновича относительно винеровского процесса:

$$d\xi_t^{(k)} = \sigma_k(t,\xi_t^{(k)}) * dW_t + b_k(t,\xi_t^{(k)})\,dt, \quad \xi_t^{(k)}|_{t=t_0} = \xi_0^{(k)}, \qquad k = 1,2. \tag{1}$$

Цель данной работы, являющейся продолжением исследования [1], состоит в доказательстве теорем сравнения для СДУ (1). Изложенный подход основан на том, что решения уравнений (1) можно представить в виде $\xi_t^{(k)} = \varphi_k(t, W_t + C_k(t))$, где функции $\varphi_k(t,u)$ — детерминированные, а $C_k(t)$ являются решениями ОДУ со случайной правой частью (см. [2]). Основным результатом является следующая теорема.

Теорема 1. *Предположим, что для всех $t \geqslant 0$ выполнены следующие условия:* a) $\varphi_2\bigl(t, \int_{\xi_0^{(1)}}^{u} (\sigma_1(t,\psi))^{-1}\,d\psi\bigr) \geqslant u$ *для всех* $u \in \mathbf{R}$; b) $\sigma_2(t,u) > 0$ *для всех* $u \in \mathbf{R}$; c) $C_2(t) \geqslant C_1(t)$ *п.н. Тогда* $\xi_t^{(2)} \geqslant \xi_t^{(1)}$ *для всех* $t \geqslant 0$ *с вероятностью* 1.

Доказанные в работе теоремы сравнения были использованы для исследования потраекторной устойчивости уравнений вида (1).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. А. С. Асылгареев, Ф. С. Насыров, “О теоремах сравнения и устойчивости с вероятностью 1 одномерных стохастических дифференциальных уравнений”, *Сиб. матем. журн.*, **57**:5 (2016), 969–977; англ. пер.: A. S. Asylgareev, F. S. Nasyrov, “Theorems of comparison and stability with probability 1 for one-dimensional stochastic differential equations”, *Siberian Math. J.*, **57**:5 (2016), 754–761.
2. Ф. С. Насыров, *Локальные времена, симметричные интегралы и стохастический анализ*, Физматлит, М., 2011, 212 с.

Атласов И. В. (Москва, Россия)**. Параллельная работа двух устройств для случая, когда должно работать хотя бы одно из устройств.**

Эта работа появилась в результате обобщения задачи из книги Б. В. Гнеденко «Курс теории вероятностей» (см. [1]). Рассматривается работа системы, состоящей из двух взаимозаменяемых устройств. Эти устройства работают последовательно одно за другим, ломаются и ремонтируются. Система прекращает свою работу, если время ремонта одного устройства оказалось больше времени работы другого устройства, т.е. образуется промежуток времени, когда одно устройство еще чинится, а второе уже успело сломаться. В книге [1] время замены одного (сломавшегося) устройства другим (отремонтированным) считалось несущественным; была построена характеристическая функция времени работы системы, и были найдены способы увеличения среднего времени работы системы. Далее эта работа обобщалась в статьях [2] и [3].

В настоящей работе рассматривается система, состоящая из двух элементов, работающих параллельно. Работа системы прерывается, когда в ремонте находятся оба элемента. Время замены одного (сломавшегося) устройства другим (отремонтированным) считается существенным. Строится характеристическая функция непрерывного времени работы системы. Находится среднее время работы системы, и рассматриваются способы его увеличения. Далее характеристическая функция рассматривается для случая, когда время работы и время ремонта каждого устройства распределены по показательным законам, и рассмотрены рекомендации, как, изменяя параметры этих распределений, можно добиться увеличения среднего времени работы системы. Для этого случая рассмотрена также структура функции распределения времени работы системы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Б. В. Гнеденко, *Курс теории вероятностей*, УРСС, М., 2001, 318 с.
2. И. В. Атласов, “Об эффективности работы нескольких взаимозаменяемых устройств”, *Вестн. ТвГУ. Сер. Прикл. матем.*, 2015, № 4, 85–101.
3. И. В. Атласов, “Работа двух параллельных устройств с учетом времени их замены”, *Вестн. ТвГУ. Сер. Прикл. матем.*, 2016, № 2, 49–79.

Белопольская Я. И. (Санкт-Петербург, Россия). **Вероятностные представления решения задачи Коши для параболических систем с кросс-диффузией**[2]**.**

Мы предлагаем подход (см. [1]–[3]), позволяющий получать вероятностные представления обобщенных решений задачи Коши для систем нелинейных параболических уравнений, возникающих в различных задачах физики, биологии, химии и других областей:

$$\partial_t u_q = \operatorname{div}\left(\sum_{m=1}^{d_1} F^{qm}(x,u)\nabla u^m\right) + \sum_{m=1}^{d_1} a^{qm}(x,u,\nabla u)\nabla u_m + \sum_{m=1}^{d_1} c_{mq}u_m,$$
$$u_q(0)(x) = u_{q0}(x), \qquad q = 1,\ldots,d_1, \quad x \in \mathbf{R}^d.$$

Предлагаемый подход продемонстрирован на примере задачи Коши для простейшей системы

$$\partial_t u_m = \Delta(u_m[u_1+u_2]) + c_m(u)u_m, \quad u_m(0,x) = u_{m0}(x) > 0, \qquad m = 1,2, \quad (1)$$

квазилинейных параболических уравнений с кросс-диффузией, представляющей собой частный случай модели Шигесада–Кавасаки–Терамото [4], которая

[2] Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 15-01-01453).

описывает эволюцию плотностей концентрации двух конкурирующих популяций.

Пусть $M_u(x) = \sqrt{u_1(t,x)+u_2(t,x)}$, $c_m(u) = a_m - b_m u_1 - c_m u_2$ и $\widetilde{w}(\theta) = w(t-\theta) - w(t)$. Рассмотрим систему СДУ

$$d\widehat{\xi}(t) = [M_u \partial_x M_u](\widehat{\xi}(\theta))\,d\theta - M_u(\widehat{\xi}(\theta))\,d\widetilde{w}(\theta), \qquad \widehat{\xi}(0) = x, \tag{2}$$

$$d\eta_m(\theta) = \widetilde{c}_u^{\,m}(\xi(\theta))\eta_m(\theta)\,d\theta + C_m^u(\xi(\theta))\eta_m(\theta)\,dw(\theta), \qquad \eta_m(0) = 1, \tag{3}$$

где $\widetilde{c}_u^{\,m}(\xi(\theta)) = c_u^m(\xi(\theta)) - \langle \nabla M_u(\xi(\theta)), \nabla M_u(\xi(\theta))\rangle$ и $C_u^m(\xi(\theta)) = -\nabla M_u(\xi(\theta))$.

Обозначим $\phi_{0,\theta}(y) = \xi_{0,y}(\theta)$, $\psi_{0,\theta}^m(x) = \widehat{\xi}_{0,x}(\theta) = \xi_{0,y}(t-\theta)$, $\widehat{\eta}_m(\theta) = \eta_m(t-\theta)$ и заметим, что справедливы соотношения $\psi_{0,\theta}^m \circ \phi_{0,\theta}^m(y) = y$, $\eta_m(t) = U_m(0,t)$, $\widehat{\eta}_m(t) = \widehat{U}_m(0,t)$, $m = 1,2$, и $\widehat{U}_m(0,t)U_m(0,t) = 1$.

Теорема 1. *Пусть u_1, u_2 — ограниченные строго положительные дифференцируемые функции, удовлетворяющие* (1) *в обобщенном смысле. Тогда существуют такие случайные процессы $\widehat{\xi}_m(t), \eta_m(t), m = 1,2$, удовлетворяющие СДУ* (2), (3), *что функции u_1, u_2 допускают вероятностное представление вида*

$$u_m(t) = \mathbf{E}\big[\widehat{\eta}_m(t) u_{0k} \circ \psi_{0,t}\big], \qquad m = 1,2. \tag{4}$$

Теорема 2. *Существует замкнутая система стохастических соотношений, включающая* (2)–(4) *и ассоциированная с системой* (1).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Я. И. Белопольская, “Стохастическая интерпретация квазилинейных параболических систем с кросс-диффузией”, *Теория вероятн. и ее примен.*, **61**:2 (2016), 268–299; англ. пер.: Ya. I. Belopolskaya, “Stochastic interpretation of quasilinear parabolic systems with cross diffusion”, *Theory Probab. Appl.*, **61**:2 (2017), 208–234.
2. Я. И. Белопольская, “Вероятностные модели динамики роста клеток при контактном ингибировании”, *Матем. заметки*, **101**:3 (2017), 346–358; англ. пер.: Ya. I. Belopol’skaya, “Probabilistic models of the dynamics of the growth of cells under contact inhibition”, *Math. Notes*, **101**:3 (2017), 406–416.
3. Ya. I. Belopolskaya, “Probabilistic representation of the Cauchy problem solutions for systems of nonlinear parabolic equations”, *Global and Stochastic Analysis*, **3**:1 (2016), 25–32.
4. N. Shigesada, K. Kawasaki, E. Teramoto, “Spatial segregation of interacting species”, *J. Theoret. Biol.*, **79** (1979), 83–99.

Бескопыльный А. Н., Бескопыльная Н. И. (Ростов-на-Дону, Россия)**. Стохастические модели механических свойств металлов.**

Стохастическая природа микроструктуры металлов порождает неоднородность развития пластической деформации и разрушения как для пластичных материалов [1], так и для хрупких [2], [3]. Для определения вида распределения $F(x) = \mathbf{P}(\Theta \leqslant x)$ случайной величины Θ (предела прочности металла) рассмотрен подход, основанный на специальном преобразовании случайных величин [4]. Кривая напряжение-деформация при одноосном растяжении удовлетворительно аппроксимируется степенной функцией $\sigma = \sigma_0 + A_0\varepsilon^m$ на интервале $\sigma \in [\sigma_0; \sigma_B]$. Введем новую переменную $u = u(\sigma)$, которая определяет накопление пластической деформации: $u = \int_{\sigma_0}^{\sigma_B} \varepsilon'(z)\,dz = B_0(\sigma_B - \sigma_0)^{\gamma+1}$. Тогда закон распределения предела прочности имеет вид $G(x) = 1 - \exp[-B_0(x-\sigma_0)^{\gamma+1}]$.

Это трехпараметрический закон Вейбулла с параметром сдвига, который играет ведущую роль в определении прочности металла и последующих прочностных расчетах. Рассмотрены различные варианты аппроксимации зависимости напряжение-деформация, и для них получены соответствующие законы распределения. Экспериментальная проверка полученных результатов показывает, что представленная методика дает наилучшее приближение по ряду статистических критериев.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Д. М. Беленький, А. Н. Бескопыльный, Л. Г. Шамраев, “К определению технологических и эксплуатационных свойств стали”, *Заводская лаборатория. Диагностика материалов*, **64**:5 (1998), 52–55; англ. пер.: D. M. Belen’kii, A. N. Beskopyl’nyi, L. G. Shamraev, “Determination of technological and operational parameters of steels”, *Industrial Laboratory*, **64**:5 (1998), 340–343.
2. M. Noorian-Bidgoli, L. Jing, “Stochastic analysis of strength and deformability of fractured rocks using multi-fracture system realizations”, *Int. J. Rock. Mech. Min. Sci.*, **78** (2015), 108–117.
3. D. Feng, X. Ren, J. Li, “Stochastic damage hysteretic model for concrete based on micromechanical approach”, *Int. J. Non-Linear Mech.*, **83** (2016), 15–25.
4. А. Н. Бескопыльный, “Вероятностные модели механических свойств”, *Методы менеджмента качества*, 1995, №3, 9.

Бовкун В. А. (Екатеринбург, Россия). **О моделях, приводящих к бесконечномерной стохастической задаче Коши[3]).**

Рассмотрим задачу о распространении тепла в одномерном стержне длины l с учетом случайных тепловых воздействий на боковую поверхность и изолированными концами. Пусть $u(x,t)$ — температура стержня в сечении $x \in [0;l]$ в момент времени $t \geqslant 0$, а $u(x,0) = f(x)$ — распределение температуры в стержне в начальный момент времени. Стержень, подвергаясь случайным тепловым воздействиям, получает количество тепла γ или $-\gamma$ на единицу длины за единицу времени с вероятностью λ.

Если принять во внимание описание физической модели, то изменение количества тепла в сечении можно представить в виде суммы двух составляющих: детерминированной и стохастической. В работе [1] доказано, что стохастическая составляющая может быть описана с помощью $L^2[0;l]$-значного цилиндрического винеровского процесса $\{W(t),\ t \geqslant 0\}$ (см., например, [2]) и, как следствие, имеет место следующий результат.

Теорема 1. *Стохастическая задача Коши для процесса распространения тепла в стержне записывается следующим образом:*

$$c\rho S\big(u(t,x) - f(x)\big) = \alpha S \int_0^t u_{xx}(s,x)\,ds + \gamma\sqrt{2\lambda}W(t), \qquad t \in [0;T], \quad x \in [0;l],$$

[3]) Работа выполнена при поддержке программы «Ведущие научные школы» (грант НШ-9356.2016.1) и программы повышения конкурентоспособности УрФУ (постановление № 211 Правительства РФ от 16.03.2013, контракт № 02.A03.21.0006 от 27.08.2013).

где c — удельная теплоемкость стержня, ρ — плотность стержня, α — коэффициент теплопроводности, S — площадь сечения x.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. В. А. Бовкун, “Построение моделей в форме абстрактных стохастических задач Коши”, Тр. ИММ УрО РАН, **22**, № 4, 2016, 94–101.
2. I. V. Melnikova, A. I. Filinkov, U. A. Anufrieva, “Abstract stochastic equations. I. Classical and generalized solutions”, *J. Math. Sci.* (*N. Y.*), **111**:2 (2002), 3430–3475.

Богачева М. Н., Зеленцов Л. Б. (Ростов-на-Дону, Россия)**. Прогнозирование состояния инвестиционно-строительных проектов на основе стохастического моделирования.**

В процессе реализации инвестиционно-строительного проекта (ИСП) z поведение системы описывается последовательностью взаимосвязанных одинаково распределенных временных рядов

$$\widetilde{Q}_z(t_i) = \widetilde{Q}_z^1(t_i) \to \widetilde{Q}_z^2(t_i) \to \cdots \to \widetilde{Q}_z^n(t_i), \qquad \widetilde{Q}_z(t_i) = f(t_i)\{T_z, S_z, H_z\},$$

где $\widetilde{Q}_z(t_i)$ — вектор состояний ИСП z в дискретный интервал планирования t_i; $f(t_i)\{T_z, S_z, H_z\}$ — характеристики состояния ИСП z в дискретный интервал планирования t_i; T_z, S_z и H_z — соответственно продолжительность, себестоимость и надежность проекта.

В качестве локального критерия оптимальности эффективности управления объектом строительства принят совокупный уровень потерь времени, возникший за определенный период планирования. Для повышения точности прогнозирования предлагается применение метода адаптивного регрессионного моделирования [1], а также псевдоградиентный метод для обновления коэффициентов моделей ИСП, что в совокупности позволит получать модели с высокой точностью аппроксимации и прогнозирования для обеспечения своевременного принятия управленческих решений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. С. Г. Валеев, *Регрессионное моделирование при обработке наблюдений*, Наука, М., 1991, 272 с.

Бурнаев Е. В. (Сколтех, ИППИ)**, Голубев Г. К.** (Aix-Marseille Université, ИППИ)**. Об одной задаче многоканального обнаружения сигнала**[4)]**.**

Рассматривается задача обнаружения сигнала с неизвестной энергией в многоканальной системе с большим числом каналов. Предполагается, что сигнал может появиться в k-м канале с известной малой априорной вероятностью π_k. Необходимо на основе наблюдений выходов всех каналов решить, присутствует ли сигнал в одном из каналов или наблюдается чистый шум. В работе описываются и сравниваются статистические свойства теста максимальной апостериорной вероятности и оптимального байесовского теста. В частности, для этих

[4)] Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 14-50-00150).

тестов находятся предельные распределения тестовых статистик и определяются множества необнаруживаемых сигналов.

По-видимому, одной из первых математических работ в области обнаружения сигнала в многоканальных системах является статья [1]. В ней рассматривались n рэлеевских каналов с равными априорными вероятностями появления сигнала с известной энергией. Задача обнаружения в гауссовских каналах рассматривалась, например, в [2]. В этой работе также предполагалось, что сигнал известной энергии появляется в одном из n каналов с равными априорными вероятностями. В настоящей же работе рассматривается ситуация, когда априорные вероятности различны, а энергия сигнала неизвестна и является мешающим параметром. Поскольку рассматриваемая статистическая задача является задачей большой размерности, то ее решение существенным образом зависит от имеющейся априорной информации и поэтому методы и результаты в настоящей работе существенно отличаются от цитируемых выше работ.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Р. Л. Добрушин, “Одна статистическая задача теории обнаружения сигнала на фоне шума в многоканальной системе, приводящая к устойчивым законам распределения”, *Теория вероятн. и ее примен.*, **3**:2 (1958), 173–185; англ. пер.: R. L. Dobrushin, “A statistical problem arising in the theory of detection of signals in the presence of noise in a multi-channel system and leading to stable distribution laws”, *Theory Probab. Appl.*, **3**:2 (1958), 161–173.
2. М. В. Бурнашев, И. А. Бегматов, “Об одной задаче обнаружения сигнала, приводящей к устойчивым распределениям”, *Теория вероятн. и ее примен.*, **35**:3 (1990), 557–560; англ. пер.: M. V. Burnashev, I. A. Begmatov, “On a problem of signal detection leading to stable distributions”, *Theory Probab. Appl.*, **35**:3 (1990), 556–560.

Васильев В. А., Догадова Т. В. (Томск, Россия). **Адаптивное оптимальное прогнозирование многомерных диффузионных процессов**[5]**.**

Рассматривается задача прогнозирования многомерного процесса диффузионного типа
$$dX(t) = \Lambda X(t)\,dt + dW(t)$$
с неизвестной матрицей динамики Λ. Прогноз $\widehat{X}(t)$ для $X(t)$ строится по наблюдениям $(X(s))_{s\leqslant t-u}$, $u>0$, на основе усеченных оценок матрицы Λ. Метод усеченного оценивания был предложен в работе [1] для систем с дискретным временем и позволяет находить оценки функционалов типа отношений по зависимым выборкам фиксированного обьема с заданной точностью в смысле метрики L_{2m}, $m \geqslant 1$.

Доказана оптимальность адаптивной процедуры прогнозирования при использовании функции риска вида
$$R_T = \frac{A}{T}\mathbf{E}e_T^2 + T,$$

[5]Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 17-11-01049).

которая по своей структуре аналогична рассмотренной в работе [2] для многомерной авторегрессии с дискретным временем. Здесь параметр A имеет смысл стоимости суммарной ошибки прогнозирования и

$$\mathrm{e}_T^2 = \frac{1}{T}\int_u^T \|\mathrm{e}(s)\|^2\,ds, \qquad \mathrm{e}(s) = \widehat{X}(s) - X(s).$$

Такой выбор функции риска дает возможность оптимизировать обьем наблюдений в зависимости от требований к качеству прогнозирования, применяя критерий качества $R_T \to \min_T$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. V. A. Vasiliev, “A truncated estimation method with guaranteed accuracy”, *Ann. Inst. Statist. Math.*, **66**:1 (2014), 141–163.
2. M. I. Kusainov, V. A. Vasiliev, “On optimal adaptive prediction of multivariate autoregression”, *Sequential Anal.*, **34**:2 (2015), 211–234.

Власков Г. А., Можаев А. М. (Ростов-на-Дону, Россия)**. Моделирование стохастически конвектирующей ионосферы.**

Традиционные модели распределения электронной концентрации N_e в F-области полярной ионосферы опираются на два определяющих фактора: ионизацию q и крупномасштабное электрическое поле магнитосферной конвекции, порождающее перенос $\vec{v}$ ионосферной плазмы [1]. Решается уравнение неразрывности $\partial N_e/\partial t + \vec{v}\,\nabla N_e = q - \beta N_e$, где β — коэффициент рекомбинации, q — функция ионообразования. Эти модели имеют детерминированный характер. Однако, как показывают измерения, электрическое поле испытывает серьезные флуктуации, особенно в авроральной зоне. Следовательно, функции, входящие в уравнение, являются случайными, зависящими от координат, тогда N_e является случайной функцией координат и времени, т.е. образует случайное поле. Используя лагранжев подход и учитывая вмороженность ионосферной плазмы в геомагнитное поле, предположим, что случайная составляющая движения магнитных силовых трубок имеет броуновский характер. Рассмотрение упрощенных задач, допускающих аналитическое решение, показало, что наличие стохастических флуктуаций конвекции должно приводить к размыванию средних значений N_e [2]. Существование решений для уравнений подобного типа доказано в [3, § 14.4]. Аналитическое решение пока не представляется возможным, и наиболее действенными остаются численные методы, в частности метод Монте-Карло. Результатом нашей работы стали расчеты распределения электронной плотности в некоторых характерных зонах верхней полярной ионосферы, гистограммы, карты математического ожидания и дисперсии величины N_e.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. М. Г. Дёминов, “Ионосфера Земли: закономерности и механизмы”, *Электромагнитные и плазменные процессы от недр Солнца до недр Земли*, ИЗМИРАН, М., 2015, 295–346.

2. Г. А. Власков, А. М. Можаев, “О моделировании стохастически конвектирующей полярной ионосферы”, *Исследования высокоширотной ионосферы*, Изд-во КНЦ АН СССР, Апатиты, 1986, 42–45.
3. Yu. E. Gliklikh, *Global and stochastic analysis with applications to mathematical physics*, Theoret. Math. Phys., Springer, London, 2011, xxiv+436 pp.

Волосатова Т. А., Данекянц А. Г. (Ростов-на-Дону, Россия)**. Моделирование квазилинейных сложных систем: случай трех приоритетов вероятностного характера с единичной суммой**[6]**.**

Данный доклад является продолжением работы [1], в которой была исследована модель экономической системы с тремя приоритетами в том случае, когда целевая функция воспроизводит разнонаправленные требования. В докладе рассматривается оптимизационная задача с целевой функцией

$$F = \mathbf{E}[F_1^{\alpha_1} F_2^{\alpha_2} F_3^{\alpha_3}], \qquad F_i(x) = \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^i x_k + b_i\right) I\left\{\sum_{k=1}^{n} a_k^i x_i + b_i > 0\right\},$$

где $I\{A\}$ — индикатор множества A, а α_i — случайные величины, называемые приоритетами: $\mathbf{P}(\alpha_i > 0) > 0$, $\mathbf{P}(\alpha_i < 1) > 0$, $i = 1, 2, 3$ и $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1$. Мы будем исследовать только те модели, в которых существуют точки локальных и глобальных максимумов функции F. Обозначим через S множество стационарных точек функции $F(x)$. Предположим, что $S \neq \varnothing$, тогда система векторов $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3\}$ линейно зависима. Пусть в этой системе существует пара линейно независимых векторов $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$. Необходимым условием существования глобального максимума является существование чисел $c_1 < 0$, $c_2 < 0$ таких, что $\vec{a}_3 = c_1\vec{a}_1 + c_2\vec{a}_2$. В докладе рассмотрена экстремальная задача для функции $F(s,t) = \mathbf{E}[(s + b_1)^{\alpha_1}(t + b_2)^{\alpha_2}(c_1 s + c_2 t + b_3)^{\alpha_3}]$ при выполнении этого соотношения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Т. А. Волосатова, А. Г. Данекянц, “Оптимизация квазилинейных сложных систем: случай трех детерминированных приоритетов”, *Междунар. науч.-исслед. журн.*, 2016, № 10(52), 127–132.

Гликлих Ю. Е. (Воронеж, Россия)**. Стохастические уравнения и включения с производными в среднем и их приложения**[7]**.**

Доклад является обзором последних результатов по уравнениям и включениям с производными в среднем, полученных в основном участниками воронежской школы после выхода из печати монографии [1].

Понятие производных в среднем было введено Э. Нельсоном в 60-х годах XX в. для нужд созданной им так называемой стохастической механики (вариант квантовой механики, см. [2]–[4]). В дальнейшем было показано, что уравнения с производными в среднем естественно возникают и во многих других разделах математической физики, экономики и др.

[6] Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 16-01-00184-а).
[7] Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 15-01-00620-а).

В работе [5] (см. также [1]) на основе небольшой модификации идей Нельсона, дополнительно к введенным Нельсоном производным справа, слева, симметрической и антисимметрической, нами была введена производная в среднем, названная нами квадратичной, которая в принципе сделала возможным нахождение процесса по его производным в среднем — совместно по одной из классических производных Нельсона и квадратичной (у Нельсона по умолчанию квадратичная производная всегда равнялась единичному оператору, может быть умноженному на постоянное число, и поэтому не была введена). В частности, была доказана разрешимость многих уравнений с производными в среднем, возникающих в математической физике, экономике и др. (см. примеры в [1]).

Дифференциальные включения с производными в среднем возникают в естественных задачах из приложений в точности так же, как обыкновенные дифференциальные включения возникают из обыкновенных дифференциальных уравнений. Например, в уравнениях с производными в среднем с управлением и обратной связью в каждой точке (t, x) расширенного фазового пространства следует рассмотреть все значения правой части при всех возможных значениях управления. Таким образом, правая часть становится многозначным отображением, а уравнение превращается во включение. Мы изучаем включения, полученные таким образом, и рассматриваем задачу об оптимальном управлении.

Особенно важны уравнения и включения с текущими скоростями (симметрическими производными в среднем), поскольку эти производные являются естественными аналогами обычной физической скорости. При этом указанные уравнения и включения наиболее трудны для исследования.

В докладе основное внимание уделяется следующим вопросам: разрешимость уравнений и включений с производными в среднем (в частности, с текущими скоростями); существование оптимальных решений (в частности, для уравнений с управлением типа геометрического броуновского движения и с текущими скоростями); стохастические уравнения леонтьевского типа, описывающие некоторые радио- и электрические устройства с помехами; уравнения второго порядка, возникающие в математической физике, и др. Также дается краткое введение в теорию производных в среднем.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Yu. E. Gliklikh, *Global and stochastic analysis with applications to mathematical physics*, Theoret. Math. Phys., Springer, London, 2011, xxiv+436 pp.
2. E. Nelson, “Derivation of the Schrödinger equation from Newtonian mechanics”, *Phys. Rev.*, **150**:4 (1966), 1079–1085.
3. E. Nelson, *Dynamical theory of Brownian motion*, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1967, iii+142 pp.
4. E. Nelson, *Quantum fluctuations*, Princeton Ser. Phys., Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1985, viii+147 pp.
5. S. V. Azarina, Yu. E. Gliklikh, “Differential inclusions with mean derivatives”, *Dynam. Systems Appl.*, **16**:1 (2007), 49–71.

Гущин А. А. (Математический институт им. В. А. Стеклова Российской академии наук, Москва, Россия). **Совместное распределение терминальных значений неотрицательного субмартингала и его компенсатора** [1][8]**.**

Дается характеризация множества $\mathbb{W}$ возможных совместных распределений терминальных значений неотрицательного субмартингала X класса (D), выходящего из 0, и предсказуемого возрастающего процесса A из его разложения Дуба–Мейера (компенсатора). Множество возможных значений останется тем же и при дополнительных предположениях на X, например при условии, что X — возрастающий процесс или квадрат мартингала. Особое внимание уделяется экстремальным (в определенном смысле) элементам множества $\mathbb{W}$ и отвечающим им процессам.

А именно, пусть μ — вероятностная мера на $\mathbf{R}_+$ с конечным средним. Обозначим $Q(u)$, $u \in (0,1)$, нижнюю квантильную функцию распределения μ, т.е.

$$Q(u) := \inf\{x\colon \mu([0,x]) \geqslant u\},$$

и определим

$$Q^*(u) := \int_0^u \frac{Q(t)}{1-t}\,dt.$$

Тогда $Q^*(u)$, $u \in (0,1)$, также будет нижней квантильной функцией некоторой вероятностной меры на $\mathbf{R}_+$ с тем же средним, что и у μ. Мы будем обозначать эту меру μ^*.

Пусть $X = (X_t)_{t\geqslant 0}$, $X_0 = 0$, — неотрицательный субмартингал класса (D) на некотором стохастическом базисе $(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_t)_{t\geqslant 0}, \mathbf{P})$ с компенсатором $A = (A_t)_{t\geqslant 0}$. Мы утверждаем, что

1) если $\mathrm{Law}(X_\infty) = \mu$, то

$$\mathbf{E} f(A_\infty) \leqslant \int_0^1 f(Q^*(u))\,du \quad \text{для любой выпуклой функции } f; \tag{1}$$

2) если задана мера μ, то существуют стохастический базис и заданный на нем неотрицательный субмартингал X с $\mathrm{Law}(X_\infty) = \mu$, удовлетворяющий указанным выше предположениям, для которого $\mathrm{Law}(A_\infty) = \mu^*$, т.е. в (1) имеет место равенство для любой выпуклой f;

3) если X удовлетворяет указанным выше предположениям, $\mathrm{Law}(X_\infty) = \mu$ и $\mathrm{Law}(A_\infty) = \mu^*$, то

$$\mathrm{Law}(X_\infty, A_\infty) = \mathrm{Law}(Q(U), Q^*(U)),$$

где U — равномерно распределенная на $(0,1)$ случайная величина.

Более того, мы приводим полную характеризацию всех таких субмартингалов. В частности, необходимым условием является принадлежность X классу (Σ) [2].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. А. А. Гущин, “Совместное распределение терминальных значений неотрицательного субмартингала и его компенсатора”, *Теория вероятн. и ее примен.*, **62**:2 (2017), 267–291.
2. A. Nikeghbali, “A class of remarkable submartingales”, *Stochastic Process. Appl.*, **116**:6 (2006), 917–938.

[8]Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 14-21-00162).

Дончев Д. С. (София, Болгария)**. Плотности вероятности выхода винеровского процесса через односторонние границы.**

В более ранних работах (см. [1]) нам удалось охарактеризовать плотность вероятности выхода винеровского процесса через любые гладкие границы в терминах решения некоторого параболического уравнения в частных производных второго порядка. Оказалось, что с помощью подходящих подстановок и преобразования Лапласа это уравнение можно свести к уравнению первого порядка, которое допускает явные решения только в трех случаях: параболических границ, а также границ, содержащих квадратный корень и рациональные функции. В качестве примера нами рассматривается граница, которая не была изучена до настоящего времени.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. D. S. Donchev, “An excursion characterization of the first hitting time of Brownian motion in a smooth boundary”, *Random Oper. Stoch. Equ.*, **15**:1 (2007), 35–48.

Живайкина А. Д., Пересецкий А. А. (Москва, Россия)**. Кредитные рейтинги российских банков и отзывы банковских лицензий 2012–2016.**

В данной работе рассматриваются 11 кредитных рейтингов российских банков, которые присваивались банкам как международными, так и российскими рейтинговыми агентствами в период 2012–2016 гг. Построены эконометрические модели этих рейтингов по открытым данным — финансовым показателям банков и макроэкономическим индикаторам. На основе исторических данных об отзыве лицензий банков построены эконометрические модели вероятности отзыва лицензии отдельно по различным формулировкам отзыва лицензии. Эти модели позволили проанализировать, до какой степени ЦБ при отзыве лицензий опирается на рейтинги и до какой степени рейтинговые агентства учитывают возможность отзыва лицензии в краткосрочном периоде.

Житлухин М. В. (Математический институт им. В.А. Стеклова Российской академии наук, Москва, Россия)**. О новых неравенствах для максимума фрактального броуновского движения** [1][9]**.**

Для фрактального броуновского движения B^H с показателем $H \in (0, 1/2)$ в работе получены новые верхние и нижние оценки для разности математического ожидания максимума B^H_t на отрезке $t \in [0, 1]$ и максимума $B^H_{t_i}$ по конечному множеству точек $t_i = i/n$, $0 \leqslant i \leqslant n$. С помощью этих результатов улучшены ранее известные оценки для математического ожидания максимума B^H, а также верхняя оценка для константы Пикандса. Показано, как, используя новые оценки, можно оценивать математические ожидания функций от фрактального броуновского движения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. K. Borovkov, Yu. Mishura, A. Novikov, M. Zhitlukhin, *New bounds for expected maxima of fractional Brownian motion*, arXiv: 1612.07842.

[9] Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 14-21-00162).

Задорожний В. Г. (Воронеж, Россия)**. О моментных функциях решений мультипликативно возмущенных случайным шумом дифференциальных уравнений.**

Рассматриваются мультипликативно возмущенные случайным шумом дифференциальные уравнения $dx/dt = \varepsilon(t,\omega)Ax + f(t,\omega)$ с начальным условием $x(0) = x_0$. Здесь t — время, X — конечномерное пространство со скалярным произведением $\langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle$, $A\colon X \to X$ — линейный оператор, $x\colon \mathbf{R} \to X$ — искомая функция, ε — случайный процесс, f — векторный случайный процесс, $x_0 \in X$ — случайный вектор. Предполагается известным характеристический функционал процессов ε, f (см. [1]): $\psi(u,v) = \mathbf{E}\exp\bigl\{i\int_T[\varepsilon(s,\omega)u(s) + \langle f(t,\omega), v(s)\rangle]\,ds\bigr\}$, где $T \subset \mathbf{R}$ — отрезок, на котором изучается задача, $\mathbf{E}$ — математическое ожидание по функции распределения процессов ε, f.

Задача отыскания моментных функций решений сводится к неслучайным дифференциальным уравнениям, содержащим традиционные производные и вариационные производные.

Вводится вспомогательное отображение

$$y(t,u,v) = \mathbf{E}\biggl(x(t)\exp\biggl\{i\int_T\bigl[\varepsilon(s,\omega)u(s) + \langle f(s,\omega), v(s)\rangle\bigr]\,ds\biggr\}\biggr).$$

Отметим, что $y(t,0,0) = \mathbf{E}x(t)$.

При дополнительном предположении о том, что x_0 не зависит от случайных процессов ε, f, для $y(t,u,v)$ получена задача

$$\frac{\partial y(t,u,v)}{\partial t} = -iA\frac{\delta_p y(t,u,v)}{\delta u(t)} - i\frac{\delta_p \psi(u,v)}{\delta v(t)}$$

с начальным условием

$$y(t_0,u,v) = \mathbf{E}(x_0)\psi(u,v).$$

Здесь $\delta_p y(t,u,v)/\delta u(t)$ — частная вариационная производная [1]. Удается найти решение полученной неслучайной задачи Коши:

$$y(t,u,v) = \psi\bigl(uE - iA\chi(t_0,t), v\bigr)\mathbf{E}x_0 - i\int_{t_0}^{t}\frac{\delta_p\psi(uE - iA\chi(s,t), v)}{\delta v(s)}\,ds.$$

Здесь $\chi(s,t,\tau)$ — функция переменной τ, равная $\operatorname{sign}(\tau - s)$ при τ, принадлежащих интервалу $(\min\{s,t\}, \max\{s,t\})$, и равная нулю при остальных значениях τ; E — тождественный оператор.

Отсюда, в частности, при $u = 0$, $v = 0$ получаем

$$\mathbf{E}x(t) = \psi\bigl(-iA\chi(0,t), 0\bigr)\mathbf{E}x_0 - i\int_0^t\frac{\delta\psi(-iA\chi(s,t), 0)}{\delta v(s)}\,ds.$$

Если случайные процессы ε, f независимы и заданы характеристическими функционалами $\varphi_\varepsilon(u)$, $\varphi_f(v)$, то формула для $y(t,u,v)$ принимает более наглядный вид

$$y(t,u,v) = \varphi_\varepsilon\bigl(uE - iA\chi(t_0,t)\bigr)\mathbf{E}x_0 + \int_{t_0}^{t}\varphi_\varepsilon(uE - iA\chi(s,t))\mathbf{E}f(s)\,ds.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. В. Г. Задорожний, *Методы вариационного анализа*, РХД, М.–Ижевск, 2006, 316 с.

Замятин А. А. (Москва, Россия)**, Ясногородский Р.** (Париж, Франция)**. Регулярные квантовые и случайные блуждания.**

Рассмотрим гильбертово пространство $l_2(\mathbf{N}^2)$ над полем комплексных чисел, где $\mathbf{N} = \{1, 2, \dots\}$. Выберем ортонормированный базис $e_{m,n}$, $m, n \geqslant 1$, и определим линейный ограниченный самосопряженный оператор (гамильтониан) $H = H_0 + V : l_2(\mathbf{N}^2) \to l_2(\mathbf{N}^2)$, действующий на базисные векторы $e_{m,n}$ следующим образом:

$$\begin{gathered} H_0 e_{m,n} = -\lambda(e_{m+1,n} + e_{m-1,n} + e_{m,n+1} + e_{m,n-1}), \qquad n, m \geqslant 2, \\ H_0 e_{1,n} = -\lambda(e_{2,n} + e_{1,n+1} + e_{1,n-1}), \qquad n \geqslant 2, \\ H_0 e_{m,1} = -\lambda(e_{m+1,1} + e_{m-1,1} + e_{m,2}), \qquad m \geqslant 2, \\ H_0 e_{1,1} = -\lambda(e_{2,1} + e_{1,2}), \\ V e_{m,n} = \mu_1 \delta(m-1) e_{m,n} + \mu_1 \delta(n-1) e_{m,n} + \mu \delta(m-1) \delta(n-1) e_{m,n}, \end{gathered}$$

где $\lambda, \mu, \mu_1 \in \mathbf{R}$.

Квантовое блуждание определяется как динамика вида $f(t) = \exp(-iHt) f(0)$, где $f(t) = \sum_{m,n=1}^{\infty} f_{m,n}(t) e_{m,n}$. Гамильтониан H задает систему, состоящую из трех частиц на одномерной решетке $\mathbf{Z}_+$, одна из которых закреплена в точке 0, а две другие — свободные частицы — взаимодействуют с неподвижной частицей, когда хотя бы одна из этих свободных частиц попадает в точку 1. Квантовое блуждание регулярно в том смысле, что свободная частица не может попасть в точку 0, где находится неподвижная частица. Волновая функция $f(t)$ определяет состояние свободных частиц: с вероятностью $p_{m,n}(t) = |f_{m,n}(t)|^2$ частицы находятся в точках m, n в момент времени t. Если в качестве начального состояния взять собственный вектор оператора H, то эти вероятности не зависят от времени.

В докладе исследован дискретный спектр оператора H и найдены в явном виде его собственные векторы. Для решения задачи был использован метод, предложенный ранее для нахождения стационарного распределения эргодического случайного блуждания в четверти плоскости.

Красий Н. П. (Ростов-на-Дону, Россия)**. Оптимизация квазилинейных моделей с несколькими независимыми приоритетами[10].**

В докладе продолжаются исследования модели, представленной в сообщении [1]. Цель работы — выявление условий существования локальных и глобальных максимумов целевой функции $F(x) = \prod_{j=1}^{3} \mathbf{E} F_j^{\alpha_j}$, где $\alpha_j \in [0; 1]$ — случайные величины (приоритеты) и

$$F_j(x) = \biggl(\sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_i + b_j\biggr) I\biggl\{\sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_i + b_j > 0\biggr\},$$
$$a_{ij} \in \mathbf{R},\ b_j \in \mathbf{R}, \quad x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n.$$

[10] Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 16-01-00184-а).

Значения приоритетов конкурирующих структур назначаются арбитром, заинтересованным в наиболее эффективном функционировании системы в целом. Показано, что необходимым условием существования стационарной точки функции $F(x)$ является линейная зависимость векторов $\overline{a}^{(j)} = (a_{1j}, \dots, a_{nj})$, $j = 1, 2, 3$. Возможны две ситуации: когда векторы лежат на разных прямых и когда все векторы коллинеарны. В первом случае доказано, что если существует точка локального экстремума (t_1^*, t_2^*) целевой функции $F(t_1, t_2) = \mathbf{E}(t_1 + b_1)^{\alpha_1}\mathbf{E}(t_2 + b_2)^{\alpha_2}\mathbf{E}(-c_1t_1 - c_2t_2 + b_3)^{\alpha_3}$, где $c_1 > 0$ и $c_2 > 0$ — некоторые константы, то все точки пересечения гиперплоскостей $t_1^* = \sum_{i=1}^n a_{i1}x_i$ и $t_2^* = \sum_{i=1}^n a_{i2}x_i$ являются точками локального максимума функции $F(x)$. В модели, отражающей вторую ситуацию, при сонаправленных векторах $\overline{a}^{(j)}$, $j = 1, 2, 3$, конечного максимума не существует. Если среди этих векторов есть противоположно направленные, то существует единственная точка t^* такая, что все точки гиперплоскости $t^* = \sum_{i=1}^n a_{i3}x_i$ являются точками глобального максимума функции $F(x)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Н. П. Красий, “Оптимизация квазилинейных моделей с тремя независимыми приоритетами”, *Современные методы и проблемы теории операторов и гармонического анализа и их приложения* – VII: *тезисы докладов*, Ростов-на-Дону, 2017, 133–134.

Кудрявцев О. Е. (Ростов-на-Дону, Россия)**. Численные методы оценки ликвидности в моделях, допускающих скачки**[11]**.**

Риск ликвидности имеет ключевое значение на финансовых рынках. Под риском ликвидности будем понимать неспособность своевременно закрыть позицию по приемлемой цене. В особенности его роль возрастает при резких движениях цен финансовых активов, которые наблюдаются на большинстве торговых площадок. Для моделирования скачков в ценах на финансовом рынке практиками используются процессы Леви. Риск ликвидности имеет две составляющие, связанные со стоимостью мгновенного исполнения сделки и стоимостью ожидания возможности совершить сделку. Анализируя вторую составляющую неликвидности, Ф. Лонгстафф [1] рассматривал инвестора с одной ценной бумагой в портфеле, который в течение определенного периода времени ограничен в возможности продавать свой актив.

При отсутствии торговых ограничений инвестор мог бы продать по максимальной цене, которая достигается активом в течение данного периода времени. Ожидаемая разница между максимальной ценой за период и ценой в конце периода дает верхнюю границу стоимости неликвидности и может быть интерпретирована как европейский lookback-опцион типа пут с плавающей ценой исполнения и начальной ценой $S = e^x$:

$$V(T, x) = \mathbf{E}\big[e^{-rT}(e^{\overline{X}_T} - e^{X_T}) \bigm| X_0 = x\big],$$

где X_t — процесс Леви, начинающийся в точке x, $\overline{X}_T$ — процесс супремума, T — период обращения опциона, r — безрисковая процентная ставка.

[11] Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 15-32-01390).

Примером таких торговых ограничений могут служить сделки РЕПО (от англ. *repurchase agreement*, *repo*), при которых участник финансового рынка фактически берет кредит под залог своих ценных бумаг путем их продажи с обязательством обратной покупки через определенный срок по заранее оговоренной цене. Поскольку право собственности на ценные бумаги переходит на период сделки от продавца к покупателю, для продавца его ценные бумаги становятся неликвидными. Операции РЕПО по своему характеру являются краткосрочными и обычно имеют срок менее года. На Московской бирже указанные сделки могут длиться 1, 7 и 14 дней.

Оценив риск ликвидности перед сделкой РЕПО, инвестору следует проводить динамический мониторинг данного риска с учетом изменения цен на актив, находящийся в залоге. Если к моменту времени T_1 максимальная цена актива достигла величины $H = e^h$ при текущей цене $S = e^x$, то стоимость неликвидности можно оценить через цену сезонного европейского lookback-опциона типа пут с плавающей ценой исполнения:

$$V(T_1, T_2; x, h) = \mathbf{E}_{T_1}\bigl[e^{-r(T_2-T_1)}(e^{\overline{X}_{T_2}} - e^{X_{T_2}}) \bigm| X_{T_1} = x,\, \overline{X}_{T_1} = h\bigr].$$

Положив $T = T_2 - T_1$, сведем решение задачи к вычислению функции

$$\begin{aligned}V(T, x) &= \mathbf{E}^x\bigl[e^{-rT}(e^{\max\{\overline{X}_T, h\}} - e^{X_T}) \bigm| X_0 = x\bigr]\\ &= \mathbf{E}^x\bigl[e^{-rT}(e^{\overline{X}_T} - e^{X_T}) \bigm| X_0 = x\bigr] + \mathbf{E}^x\bigl[e^{-rT}(H - e^{\overline{X}_T})\mathbf{1}_{\{\overline{X}_T < h\}} \bigm| X_0 = x\bigr].\end{aligned}$$

Полученные математические ожидания можно эффективно вычислить, используя метод Винера–Хопфа и формулы приближенной факторизации, полученные в [2].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. F. A. Longstaff, “How much can marketability affect security values?”, *J. Finance*, **50**:5 (1995), 1767–1774.
2. O. Kudryavtsev, “Advantages of the Laplace transform approach in pricing first touch digital options in Lévy-driven models”, *Bol. Soc. Mat. Mex.* (3), **22**:2 (2016), 711–731.

Лисовский Д. И. (Математический институт им. В.А. Стеклова Российской академии наук, Москва, Россия). **О распределении моментов первого выхода броуновского движения на случайную границу**[12]**.**

Рассмотрим модель броуновского движения с *разладкой*, а именно процесс $X_t = x + \mu(t-\theta)^+ + \sigma B_t$, где $\mu, x \in \mathbf{R}$, $\sigma > 0$, $(B_t)_{t\geqslant 0}$ — стандартный винеровский процесс, $\theta \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$ — экспоненциально распределенная случайная величина, интерпретируемая как ненаблюдаемый момент появления *разладки*. Предполагается, что заданное броуновское движение $(B_t)_{t\geqslant 0}$ и случайная величина θ независимы. Для процесса X_t естественным образом определим моменты первого выхода на заданный уровень:

$$\tau_a^\theta = \inf\{t \geqslant 0\colon X_t \geqslant a\}, \quad \sigma_b^\theta = \{t \geqslant 0\colon X_t \leqslant b\},$$

[12]Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 15-11-30042).

где $a > x$, $b < x$; вводя некоторые новые обозначения, эти моменты можно переписать в эквивалентном виде

$$\tau^{\theta}_{\widetilde{a}} = \inf\{t \geqslant 0\colon B_t \geqslant \widetilde{a} - \widetilde{\mu}(t-\theta)^+\}, \quad \sigma^{\theta}_{\widetilde{b}} = \{t \geqslant 0\colon B_t \leqslant \widetilde{b} - \widetilde{\mu}(t-\theta)^+\},$$

где $\widetilde{a} > 0$, $\widetilde{b} < 0$ и $\widetilde{\mu} \in \mathbf{R}$, и интерпретировать как моменты первого достижения броуновским движением B_t *случайной границы* специального вида. Также в работе изучается момент остановки $\gamma^{\theta}_{a,b} = \tau^{\theta}_a \wedge \sigma^{\theta}_b$, являющийся моментом первого выхода процесса X_t из интервала $[b, a]$. Заметим, что введенные случайные величины τ^{θ}_a, σ^{θ}_b и $\gamma^{\theta}_{a,b}$ являются обобщениями хорошо изученных моментов первого достижения заданных уровней броуновским движением (см. [1] и [2]). В докладе представлены полученные автором преобразования Лапласа, явные выражения для плотностей и математических ожиданий введенных моментов остановки.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. А. Н. Ширяев, “О мартингальных методах в задачах о пересечении границ броуновским движением”, Совр. пробл. матем., **8**, МИАН, М., 2007, 3–78.
2. A. N. Borodin, P. Salminen, *Handbook of Brownian motion — facts and formulae*, 2nd ed., Probab. Appl., Birkhäuser Verlag, Basel, 2002, xvi+672 с.

Лыков А. А., Малышев В. А. (Москва, Россия)**. Насколько неравновесная статистическая физика статистична.**

Рассмотрим систему N частиц на прямой с взаимодействием

$$U = \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant N} V(|x_j - x_i|),$$

где потенциал взаимодействия между частицами имеет вид

$$V(x) = \frac{\omega^2}{2}\begin{cases} \phi(x), & 0 < x \leqslant a - a_1, \\ (x-a)^2, & a - a_1 < x \leqslant a + a_1, \\ \text{const}, & x > a + a_1, \end{cases}$$

для произвольной гладкой функции $\phi(x)$ и $a = 1/N$, $a_1 = r/N > 0$, $r < 1$, $\omega = \omega' N > 0$. Начальные условия таковы:

$$x_{k+1}(0) - x_k(0) = \frac{1}{N} X\left(\frac{k}{N}\right) > 0, \qquad \dot{x}_{k+1}(0) - \dot{x}_k(0) = \frac{1}{N} V\left(\frac{k}{N}\right),$$
$$x_1(0) = 0, \quad \dot{x}_1(0) = v, \quad X(0) = X(1) = 1, \quad V(0) = V(1) = 0$$

для некоторых $v \in \mathbf{R}$ и $X, V \in C^4([0,1])$.

Теорема. *Для всех $t \geqslant 0$ и $k = 1, \ldots, N-1$ имеют место неравенства*

$$\frac{1-\gamma}{N} \leqslant x_{k+1}(t) - x_k(t) \leqslant \frac{1+\gamma}{N},$$

где

$$\gamma = 2\alpha + \frac{\beta N}{\omega} = 2\alpha + \frac{\beta}{\omega'}, \qquad \alpha = \int_0^1 |X''(y)|\,dy, \qquad \beta = \int_0^1 |V''(y)|\,dy,$$

что означает отсутствие столкновений между частицами.

При $N \to \infty$ мы получаем регулярную континуальную систему частиц [1] с траекториями $y(t,x)$, скоростями $u(t,y)$ и начальными условиями $y(0,x)=x$, $u(0,y)=v(x)$.

Мы выводим из условия отсутствия столкновений систему из трех уравнений [2] — уравнение непрерывности, уравнение Эйлера и уравнение состояния (соотношение между плотностью ρ и давлением p):

$$\rho_t + (u\rho)_y = 0, \quad u_t + uu_y = -\frac{1}{\rho}p_y, \quad p = -\frac{(\omega')^2}{\rho} + (\omega')^2.$$

Кроме того, дается обзор трех «стохастических» методов вывода, основанных на стохастической динамике, кинетических уравнениях Больцмана или на цепочке уравнений ББГКИ для корреляционных функций. Обсуждаются нестрогие и недоказанные моменты в этих методах вывода.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. А. А. Лыков, В. А. Малышев, В. Н. Чубариков, “Регулярные континуальные системы точечных частиц. I. Системы без взаимодействия”, *Чебышевский сб.*, **17**:3 (2016), 148–165.
2. A. A. Lykov, V. A. Malyshev, “From N-body problem to Euler equations”, *Russ. J. Math. Phys.*, **24**:1 (2017), 79–95.

Мартынов Г. В. (ИППИ РАН, Москва, Россия). **Критерий согласия для гипотезы о гауссовости случайного процесса** [1][13]**.**

Задано вероятностное пространство $(X,\mathscr{B},\mu)$, где X — вещественное сепарабельное гильбертово пространство и $\mathscr{B}$ — борелевская σ-алгебра на X. Будем проверять гипотезу о том, что мера μ эквивалентна гауссовской мере с нулевым математическим ожиданием и ядерным ковариационным оператором K. В качестве альтернатив выбираются все другие меры, в том числе гауссовские. Пусть X_i, $i=1,\dots,n$, — наблюдения X, а $(X_{i1},X_{i2},\dots)$, $i=1,\dots,n$, — их разложения по базису, соответствующему оператору K. Пусть α_i, $i=1,2,\dots$, — характеристические числа оператора K. Введем $T_{ij}=G(\alpha_j X_{ij})$, $i=1,\dots,n$, $j=1,2,\dots$, где G — функция стандартного одномерного нормального распределения. Каждое наблюдение X_i заменим вектором $T_i=(T_{i1},T_{i2},\dots)$, принадлежащим $[0,1]^\infty$ и имеющим при H_0 равномерное распределение на $[0,1]^\infty$. Определим функцию распределения на $[0,1]^\infty$ равенством $F(t)=\prod_{i=1}^\infty t_i^{r_i}$, где $t=(t_1,t_2,\dots)$ и $r_1,r_2,\dots$ — последовательность, убывающая от 1 к 0. Аналогично определим эмпирическую функцию распределения $F_n(t)=n^{-1}\sum_{i=1}^n\prod_{j=1}^\infty I\{T_{ij}<t_j^{r_i}\}$. Гипотеза может быть проверена с использованием статистики Крамера–Мизеса $\omega_n^2=n\int_{[0,1]^\infty}(F_n(t)-F(t))^2\,dt$, значение которой может быть вычислено по методу Монте-Карло. С использованием теоремы Прохорова доказано, что эмпирический процесс $\sqrt{n}\,(F_n(t)-F(t))$, $t\in[0,1]^\infty$, слабо сходится в $L_2([0,1]^\infty)$ при некоторых условиях на $\{r_i\}$ к гауссовскому процессу с ковариационной функцией

$$C(s,t)=\prod_{i=1}^\infty \min(s_i^{r_i},t_i^{r_i})-\prod_{i=1}^\infty s_i^{r_i}t_i^{r_i}, \qquad s,t\in[0,1]^\infty.$$

[13]Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 14-50-00150).

Предложен метод вычисления точных собственных значений и функций для $C(s,t)$. Вычислена таблица предельного распределения статистики ω_n^2 при бесконечной размерности гильбертова пространства и при $r_i = i^{-3(1-i^{-1/2})}$. Так, $\mathbf{P}\{\omega_n^2 \leqslant 0.9\} = 0.16450$. Предельное распределение не зависит от K, но зависит от выбора $\{r_i\}$ и от размерности гильбертова пространства. Изложенный метод может применяться, например, для проверки винеровости случайного процесса или для проверки равномерности распределения в единичном кубе большой размерности.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. G. Martynov, "A Cramér–von Mises test for Gaussian processes", *Mathematical statistics and limit theorems*, Springer, Cham, 2015, 209–229.

Мелкумова Л. Э. (Самара, Россия)**. Сравнение результатов регрессионного анализа для методов НК, Ridge и LASSO**[14]**.**

Задачи оценки коэффициентов B линейной регрессии по исходным данным $\mathbf{W}$, $\mathbf{V}$ с помощью методов НК, Ridge и LASSO (см. [1]) можно сформулировать в виде:

$$
\begin{aligned}
&1)\quad \|\mathbf{V}-\mathbf{W}B\|^2 \longmapsto \min,\\
&2)\quad \|\mathbf{V}-\mathbf{W}B\|^2 + \lambda\|B\|_2 \longmapsto \min,\\
&3)\quad \|\mathbf{V}-\mathbf{W}B\|^2 + \lambda\|B\|_1 \longmapsto \min.
\end{aligned}
$$

Проведен анализ данных Wine Quality (UCI Machine Learning Repository): красное вино (1599 наблюдений), белое вино (4898 наблюдений), см. [2]. Предикторы — 11 физико-химических характеристик вина, отклик — оценка качества по шкале от 0 до 10.

Для анализа мультиколлинеарности вычислены коэффициенты увеличения дисперсии предикторов VIF_j, $j = 1,\dots,11$. Максимальные значения VIF: красное вино — 7.125, белое вино — 28.233. Методом кросс-валидации найдены оптимальные значения параметров регуляризации λ для Ridge и LASSO, которые использовались при построении регрессионных моделей. Данные для каждого вида вина были случайным образом разбиты на обучающую и контрольную выборки. Для всех видов регрессии построение моделей проводилось по обучающим выборкам, а подсчет ошибок (RSS — residual sum of squares) производился по контрольным выборкам. Использование метода LASSO привело к уменьшению числа предикторов как для белого, так и для красного вина. Величина RSS на контрольных выборках для МНК оказалась больше, чем для Ridge и LASSO.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. G. James, D. Witten, T. Hastie, R. Tibshirani, *An introduction to statistical learning. With applications in* R, Springer Texts Statist., **103**, Springer, New York, 2013, xiv+426 pp.

[14] Работа выполнена при поддержке РФФИ (гранты № 16-41-630-676, 16-01-00184-а).

2. P. Cortez, A. Cerdeira, F. Almeida, T. Matos, J. Reis, “Modeling wine preferences by data mining from physicochemical properties”, *Decision Support Systems*, **47**:4 (2009), 547–553.

Муромская А. А. (Москва, Россия). **Оптимальное перестрахование для компании, заключающей договоры комбинированного страхования.**

Рассмотрим работу страховой компании, заключающей договоры страхования, покрывающие сразу $k \geqslant 2$ рисков. Предположим, что каждый из данных рисков может быть отдан компанией в перестрахование произвольного типа и в каждый момент времени $t \geqslant 0$ страховая компания имеет возможность выбирать параметры d_t^i перестрахования i-го риска, руководствуясь при этом значением капитала $X_t^{\overline{d}}$. Процесс $\overline{d}_t = (d_t^1, \dots, d_t^k)$, где $d_t^i = d^i(X_t^{\overline{d}})$ являются измеримыми функциями от капитала компании, определяет стратегию перестрахования. Основной задачей компании является поиск оптимальной стратегии перестрахования, максимизирующей вероятность неразорения. В соответствии с поставленной задачей получено уравнение Гамильтона–Якоби–Беллмана и доказаны существование и единственность решения данного уравнения. При этом также доказано существование оптимальной стратегии перестрахования, при использовании которой вероятность неразорения компании максимальна. Полученные результаты представляют собой логическое продолжение и обобщение исследований, посвященных поиску оптимальных стратегий перестрахования в моделях с фиксированным типом договора перестрахования и одним риском в рамках одного договора страхования (см. [1] и [2]). Для иллюстрации полученных теоретических результатов приведены численные примеры в случае независимых рисков и в случае зависимых рисков, совместное распределение которых построено с помощью копулы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. H. Schmidli, “Optimal proportional reinsurance policies in a dynamic setting”, *Scand. Actuar. J.*, **2001**:1 (2001), 55–68.
2. А. Н. Громов, “Оптимальная стратегия перестрахования эксцедента убытка”, *Вестн. Моск. ун-та. Сер.* 1 *Матем. Мех.*, 2011, № 4, 17–22; англ. пер.: A. N. Gromov, “Reinsurance optimal strategy of a loss excess”, *Moscow Univ. Math. Bull.*, **66**:4 (2011), 153–157.

Насыров Ф. С. (Уфа, Россия). **О представлении решений волновых уравнений в виде математических ожиданий.**

Показано, что решения как задачи Коши для уравнения колебаний неограниченной струны, так и первой, второй и третьей краевых задач для уравнения колебаний ограниченной струны представляются в виде математических ожиданий. При этом, в отличие от работы [1], где для этой цели применяется весьма сложная техника (в частности, строится обобщенный случайный процесс, являющийся пределом некоторой последовательности случайных блужданий) в данной работе показано, что решения представляются в виде математических ожиданий детерминированных функций от случайной величины, имеющей равномерное распределение на отрезке.

Часть результатов переносится на случай волновых уравнений размерностей $n = 2, 3$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Н. В. Смородина, М. М. Фаддеев, “Вероятностный подход к решению уравнения колебаний струны”, *Вероятность и статистика*. 18, Посвящается юбилею Ильдара Абдулловича Ибрагимова, Зап. науч. сем. ПОМИ, **408**, ПОМИ, СПб., 2012, 283–302; англ. пер.: N. V. Smorodina, M. M. Faddeev, “The probabilistic approach to the solution of the string wave equation”, *J. Math. Sci.* (*N. Y.*), **199**:2 (2014), 228–235.

Павлов И. В. (Ростов-на-Дону, Россия)**. Интерполяционные мартингальные меры и хааровские расширения финансовых рынков**[15]**.**

В докладе представлен обзор недавних результатов, связанных с нахождением интерполяционных мартингальных мер, а также новых результатов, полученных лично автором и членами его научной группы. Для того чтобы сосредоточиться на существе дела, а не на технических деталях, будем рассматривать только одношаговые процессы, принимающие в финальный момент времени счетное число значений (возможно, повторяющихся). Начальные значения этих процессов будут всегда постоянны.

Обозначим через $Z = (Z_n, \mathscr{F}_n)_{n=0}^1$ одношаговый процесс, где $\mathscr{F}_0 = \{\Omega, \varnothing\}$, $\mathscr{F}_1$ порождена разбиением Ω на счетное число атомов B_k^i ($k \in \mathbf{N} = \{1, 2, \dots\}$, $1 \leqslant i < m_k+1$, $1 \leqslant m_k \leqslant \infty$), $Z_0 = a$, $Z_1(B_k^i) = b_k$ (b_k — различные действительные числа, $b_k \neq a$ для любого $k \in \mathbf{N}$). Предположим, что $\inf_k b_k < a < \sup_k b_k$. Множество мартингальных мер P на $\{\Omega, \mathscr{F}_1\}$ таких, что $p_k^i := P(B_k^i) > 0$ и $b_l \neq \sum_J b_k p_k^i / \sum_J p_k^i$, для всех $l (1 \leqslant l < \infty)$ и всех подмножеств $J \subset \{(k, i), 1 \leqslant k < \infty, 1 \leqslant i < m_k + 1\}$ с конечным дополнением J^c, обозначается через $\mathscr{P}$, называется множеством специальных интерполяционных мартингальных мер.

Сначала предположим, что σ-алгебра $\mathscr{F}_1$ конечна. Это равносильно выполнению неравенств $r < \infty$ и $m_k < \infty$ для всех $0 \leqslant k \leqslant r$. Легко видеть, что необходимыми условиями непустоты $\mathscr{P}$ являются равенства $m_1 = \dots = m_r = 1$ и несовпадение a ни с одним из чисел $b_1, \dots, b_r$. При выполнении этих условий $\mathscr{P} \neq \varnothing$ (см. [1], [2]).

Теперь предположим, что σ-алгебра $\mathscr{F}_1$ бесконечна, но $r < \infty$. Не нарушая общности, можно считать, что $b_1 < \dots < b_r$. Ясно, что если существует единственный индекс k $(0 \leqslant k \leqslant r)$, при котором $m_k = \infty$, то $\mathscr{P} = \varnothing$. Предположим, что существуют по крайней мере два индекса k и k', при которых $m_k = \infty$ и $m_{k'} = \infty$. Тогда: 1) если $r = 2$ или $r = 3$, то $\mathscr{P} \neq \varnothing$ (см. [3]); 2) если $r = 4$, $m_k = \infty$ $(k = 1, 2, 3, 4)$ и $b_1 < a < b_2$ или $b_3 < a < b_4$, то $\mathscr{P} \neq \varnothing$ (см. [4]); 3) если $r \geqslant 4$ и числа $b_1, \dots, b_r$ рациональны, то $\mathscr{P} \neq \varnothing$ (см. [3]); 4) если $b_1 < a < b_2 < b_3 < b_4 < b_5 < \cdots$, причем $b_k - b_{k-1} \geqslant b_{k-1}$, для любого $k \geqslant 2$, то $\mathscr{P} \neq \varnothing$.

В докладе при $r = 4$ представлены другие достаточные условия, обеспечивающие непустоту множества $\mathscr{P}$. Также новой является следующая теорема.

Теорема. *Если среди чисел $a, b_1, b_2, \dots$ ровно одно число иррационально, а остальные рациональны, то $\mathscr{P} \neq \varnothing$.*

Отметим, что недавно В. В. Шамраева доказала, что если выполняются условия пункта 4), то существуют мартингальные меры, удовлетворяющие значительно более сильному интерполяционному свойству, чем принадлежность множеству $\mathscr{P}$.

[15] Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 16-01-00184-а).

В докладе подробно описана схема расширения неполных безарбитражных финансовых рынков до полных с использованием мартингальных мер из $\mathscr{P}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. М. Н. Богачева, И. В. Павлов, "О хааровских расширениях безарбитражных финансовых рынков до безарбитражных и полных", *УМН*, **57**:3(345) (2002), 143–144; англ. пер.: M. N. Bogacheva, I. V. Pavlov, "Haar extensions of arbitrage-free financial markets to markets that are complete and arbitrage-free", *Russian Math. Surveys*, **57**:3 (2002), 581–583.
2. И. В. Павлов, И. В. Цветкова, В. В. Шамраева, "Некоторые результаты о мартингальных мерах одношаговых моделей финансовых рынков, связанные с условием несовпадения барицентров", *Вестн. РГУПС*, 2012, № 3(47), 174–181.
3. И. В. Павлов, В. В. Шамраева, И. В. Цветкова, "О существовании мартингальных мер, удовлетворяющих ослабленному условию несовпадения барицентров, в случае счетного вероятностного пространства", *Теория вероятн. и ее примен.*, **61**:1 (2016), 173–181; англ. пер.: I. V. Pavlov, V. V. Shamraeva, I. V. Tsvetkova, "On the existence of martingale measures satisfying the weakened condition of noncoincidence of barycenters in the case of countable probability space", *Theory Probab. Appl.*, **61**:1 (2017), 167–175.
4. В. В. Шамраева, "О неравенствах, обеспечивающих выполнение интерполяционных свойств мартингальных мер", в ст. "Тезисы докладов, представленных на Международной конференции по стохастическим методам", *Теория вероятн. и ее примен.*, **61**:3 (2016), 616–617.

Переварюха А. Ю. (Санкт-Петербург, Россия)**. Моделирование коллапса промысловой популяции при стохастической неопределенности**[16]**.**

Предложена динамическая модель со стохастической составляющей для специфического сценария коллапса: особого случая развития стремительной деградации эксплуатируемой популяции. Сценарий важен, так как состояние биоресурсов оценено перед коллапсом как благополучное [1]. Стохастическое дополнение необходимо для описания неожиданной возможности восстановления малочисленной популяции, как в случае сига оз. Онтарио. Применена дискретно-непрерывная модель «запас $\Leftrightarrow$ пополнение» на основе дифференциальных уравнений убыли численности с траекторией в итерационной форме $x_{n+1} = \psi(x_n)$, где $\psi(x) = N(T)$ — решение задачи Коши на интервале ювенальной уязвимости $t \in [0, T]$ с начальными условиями $N(0) = \lambda x_{n-1}$, зависящими от состояния запаса, λ — средняя плодовитость. Ранее в [2] был описан эффект порогового состояния численности U_1 в форме репеллерной точки: $\lim_{n\to\infty} \psi^n(x_0) = U_0$, $U_0 < \varepsilon$, для всех $x_0 < U_1$. Аттрактор для состояния $x_0 > U_1$ популяции — цикл без каскада $p = 2^I$, $I \to \infty$. Принята гипотеза, что успех воспроизводства малой группы носит вероятностный характер; тогда существует не точка, а область значений состояния малочисленной группы $U_1 \in \Omega_x$, где репродуктивный процесс обусловлен случайными воздействиями и вероятность события «восполнения» $\psi(x_0) > x_0$, $x_0 \in \Omega$, будет плавно убывать при дальнейшем истощении $x_n \to 0+$. В вычислительной модели триггерный функционал $\Theta(N(0)) = [1 + \exp(-\kappa N(0)^2)]$, $\lim_{N(0)\to\infty} \Theta(N(0)) = 1$,

[16] Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 15-07-01230, СПИИРАН).

дополнен случайной величиной γ с показательным законом распределения: $\widetilde{\Theta} = \Theta(N(0)) \times \gamma$, для локального возмущения в уравнении убыли численности первой стадии развития молоди:

$$\dot{N} = -N(t)\big(\alpha w(t)N(t) + \beta\widetilde{\Theta}N(t)\big), \qquad t \in [0, \tau], \quad \tau < T.$$

Учтена скорость размерного развития особей поколения: $\dot{w} = v(N^{-2/3}(t))$, $w(0) = \widehat{w}$. Для старшей стадии развития в форме правой части f_2 введена запаздывающая регуляция:

$$\dot{N} = f_2(N(t - \varsigma), w(\tau)), \qquad t \in [\tau, T], \quad \varsigma < \tau.$$

Метод включения $\widetilde{\Theta}$ позволил описать стохастичное поведение траектории в узком диапазоне состояния запаса $x_n \in U_1 \pm \Omega(\gamma)$. Модель демонстрирует восстановление популяции при сохранении репродуктивно изолированных групп.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. C. Costello, S. D. Gaines, J. Lynham, “Can catch shares prevent fisheries collapse?”, *Science*, **321**:5896 (2008), 1678–1681.
2. А. Ю. Переварюха, “Неопределенность асимптотической динамики при моделировании процесса управления биоресурсами”, *Изв. РАН. Теория и системы управления*, 2011, № 3, 140–148; англ. пер.: A. Yu. Perevaryukha, “Uncertainty of asymptotic dynamics in bioresource management simulation”, *J. Comput. Syst. Sci. Int.*, **50**:3 (2011), 491–498.

Печерский Е. А. (Москва, Россия)**. Марковская динамика конфигураций двух типов частиц** [1], [2] [17])**.**

Изучается марковская динамика сети Джексона с двумя типами запросов, образующих очереди в узлах обслуживания. Узлы обслуживания образуют d-мерный дискретный тор $\mathbf{T}^d$. Один тип запросов будем называть *стандартными*, другой тип — *специальными*. Стадартные запросы, независимо от специальных, образуют обычную сеть Джексона. Специальных запросов в системе конечное число, сохраняющееся в ходе динамики. Их динамика зависит от конфигурации стандартных запросов. Таким образом, пространство состояний марковского процесса, описывающего динамику системы, есть множество конфигураций $\mathscr{X} = \mathbf{N}^{\mathbf{T}^d} \times \mathbf{N}^{\mathbf{T}^d}$. Состояние есть пара $(\underline{n}, \underline{y}) \in \mathscr{X}$, где $\underline{n} = (n_i,\, i \in \mathbf{T}^d)$, $\underline{y} = (y_i,\, i \in \mathbf{T}^d)$ — число стандартных и число специальных требований. Пусть L — общее число специальных требований, тогда $L = \sum_{i \in \mathbf{T}^d} y_i$. Динамика стандартных требований определяется интенсивностями λ_i, $i \in \mathbf{T}^d$, прибытия стандартных заявок в каждый узел i, интенсивностями μ_i покинуть систему из узла i и интенсивностями β_{ij} перескока стандартных заявок. Динамика специальных заявок определяется интенсивностями τ_{ij} перескока. При некоторых условиях симметрии и ограничениях на динамику специальных запросов, зависящих от конфигурации стандартных, доказана следующая теорема.

[17]) Совместная работа с Г. Шютцем (Gunter Schütz) и А. А. Ямбарцевым.

Теорема. *Существуют константы $\gamma_i > 0$, $i \in \mathbf{T}^d$, такие, что стационарное распределение π марковской динамики требований на $\mathscr{X}$ есть*

$$\pi(\underline{n}, \underline{y}) = \prod_i \left(\frac{\lambda_i}{\mu_i}\right)^{n_i} \gamma_i^{y_i}.$$

Накладываемые условия таковы, что нет детального баланса. Однако есть соотношения, которые мы называем балансом трех состояний.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. S. Trimper, U. C. Täuber, G. M. Schütz, *Reaction-controlled diffusion*, arXiv: cond-mat/0001387.
2. M. Gannon, E. Pechersky, Y. Suhov, A. Yambartsev, “Random walks in a queueing network environment”, *J. Appl. Probab.*, **53**:2 (2016), 448–462.

Пиуновский А. Б. (Ливерпуль, Великобритания)**. О стратегиях в управляемых скачкообразных марковских процессах**[18]**.**

В теории управляемых скачкообразных процессов есть два главных направления: полумарковские процессы принятия решений (SMDP) и марковские процессы принятия решений с непрерывным временем (CTMDP).

Пусть $\mathbf{X}$ и $\mathbf{A}$ — стандартные борелевские пространства состояний и управлений, $q_x(a)$ — интенсивность скачков из состояния $x \in \mathbf{X}$ при управлении $a \in \mathbf{A}$ и $c(x, a)$ — соответствующая скорость потерь. Предположим, что $x \in \mathbf{X}$ — начальное состояние.

1. В случае SMDP можно выбрать управление $a \in \mathbf{A}$, например, в виде обратной связи $a = \varphi(x)$, и это значение управления остается постоянным на интервале $(0, \Theta_1]$ постоянства состояния x. Распределение Θ_1 экспоненциальное: $\mathbf{P}(\Theta_1 \leqslant t \mid x) = 1 - e^{-q_x(\varphi(x))t}$, и скорость потерь равна $c(x, \varphi(x))$.

В более общем случае лицо, принимающее решения, выбирает стандартное борелевское пространсто Ξ, генерирует случайный элемент $\xi \in \Xi$ в соответствии с выбранным стохастическим ядром $p(d\xi|x)$ и применяет зависящее от времени управление $A(t) = \varphi(x, \xi, t)$. Если $\Xi = \mathbf{A}$ и $\varphi(x, a, t) = a$, то получается рандомизированная версия обратной связи, описанной выше. Такая стратегия управления, заданная набором $\{\Xi, p, \varphi\}$, *реализуема* в том смысле, что существует случайный процесс $A(u, \widetilde{\omega})$ такой, что

$$\forall\, q_x(a) \quad \mathbf{P}(\Theta_1 \leqslant t \mid x) = \int_{\widetilde{\Omega}} \left[1 - \exp\left\{-\int_{(0,t]} q_x(A(u, \widetilde{\omega}))du\right\}\right] \widetilde{\mathbf{P}}(d\widetilde{\omega}),$$

и для любой $c(x, a)$ реальная ожидаемая скорость потерь равна

$$\int_{\widetilde{\Omega}} c(x, A(t, \widetilde{\omega}))\, \widetilde{\mathbf{P}}(d\widetilde{\omega}).$$

Такие стратегии будут называться ξ-стратегиями. Разные их версии изучали Р. Ховард, Дж. Батер, А. Юшкевич, Е. Файнберг, А. Федергруен, П. Варайа и др. в 1960–1970-е годы.

[18] Автор благодарен IMA (Великобритания) за поддержку.

2. В случае CTMDP выбирается стохастическое ядро $\pi(da|x,t)$, что приводит к выражению

$$\mathbf{P}(\Theta_1 \leqslant t \mid x) = 1 - \exp\biggl\{-\int_{(0,t]}\int_{\mathbf{A}} q_x(a)\,\pi(da|x,u)\,du\biggr\},$$

и ожидаемая скорость потерь равна $\int_{\mathbf{A}} c(x,a)\,\pi(da|x,t)$.

Такие стратегии будут называться π-стратегиями. Они изучались начиная с 1980-х годов в работах М. Китаева, Е. Файнберга, С. Гуо, Т. Прието-Румо, О. Хернандез-Лерма и др. π-стратегии *нереализуемы*, кроме случая вырожденного ядра π.

Первая проблема состоит в том, что ξ-стратегии и π-стратегии (почти) не пересекаются. Поэтому SMDP и CTMDP развивались параллельно. В настоящем докладе предложен общий класс π-ξ-стратегий, что позволит описать единообразно все модели управляемых скачкообразных процессов.

Далее нужно понять, какие классы стратегий достаточны для решения задач оптимизации и какие классы реализуемы. Представляется, что удобный класс реализуемых и достаточных стратегий составляют «пуассоновские» стратегии.

Подробности можно найти в [1], [2].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. A. Piunovskiy, “Randomized and relaxed strategies in continuous-time Markov decision processes”, *SIAM J. Control Optim.*, **53**:6 (2015), 3503–3533.
2. A. B. Piunovskiy, “Realizable strategies in continuous-time Markov decision processes”, *Oper. Res. Lett.* (submitted).

Пресман Э. Л. (Москва, Россия)**. Модель управления запасами с ценой, зависящей от марковского процесса с непрерывным временем и конечным числом состояний**[19]**.**

Имеется производитель, которому нужно с постоянной интенсивностью потреблять промежуточный продукт (товар). Если цена товара зависит от состояния марковской цепи с непрерывным временем (модель предложена И. М. Сониным), то целесообразно организовать склад и проводить как непрерывные, так и дискретные закупки товара. Затраты при хранении товара пропорциональны его количеству на складе. Задача состоит в организации работы склада с целью минимизации издержек на покупку и хранение (дисконтированных или предельных за единицу времени).

И. М. Сонин и Дж. Хилл [1] рассматривали предельные за единицу времени издержки и предположили, что для каждого состояния существует такой порог, что если количество товара на складе больше этого порога, то проводить закупки не следует, а если меньше, то надо разово произвести закупку до уровня этого порога, а потом производить закупки с единичной интенсивностью, чтобы запас на складе был равен пороговому значению вплоть до следующего скачка марковского процесса. В [1] для случая двух состояний и некоторых подслучаев трех состояний были найдены оптимальные значения порогов в классе пороговых стратегий.

[19] Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 15-06-03723).

Следуя работам [2] и [3], мы исследуем оптимальность в классе всех согласованных (а не предсказуемых!) управлений и рассматриваем сначала дисконтированные издержки, а затем (с помощью предельного перехода) предельные за единицу времени. Доказывается оптимальность пороговых стратегий, и приводится алгоритм последовательного построения оптимальных порогов. Этот алгоритм основан на том, что вместо значений функционалов, соответствующих пороговым стратегиям, изучаются их производные, а вместо гладкого склеивания используются соображения выпуклости, которые оказываются эквивалентными дважды гладкому склеиванию.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. J. Hill, I. Sonin, *An inventory optimization model with Markov-modulated commodity prices*, Manuscript.
2. E. Presman, S. P. Sethi, "Inventory models with continuous and Poisson demands and discounted and average costs", *Production and Operations Management*, **15**:2 (2006), 279–293.
3. E. Presman, S. Sethi, Q. Zhang, "Optimal feedback production planning in a stochastic N-machine flowshop", *Automatica*, **31**:9 (1995), 1325–1332.

Пчелинцев Е. А. (Томск, Россия)**. Адаптивное оценивание в непрерывной регрессии с условно-гауссовскими шумами Леви**[20]**.**

Рассматривается задача адаптивного робастного оценивания неизвестной функции регрессии $S(\,\cdot\,)$ по наблюдениям процесса, который описывается стохастическим дифференциальным уравнением

$$dy_t = S(t)\,dt + d\xi_t, \qquad 0 \leqslant t \leqslant n,$$

где $(\xi_t)_{0\leqslant t\leqslant n}$ — ненаблюдаемый шум, моделируемый условно-гауссовским процессом Леви. Для оценивания функции S в [1] предложена процедура выбора модели на основе взвешенных оценок МНК, которая обеспечивает адаптивное решение задачи непараметрического оценивания посредством точного неасимптотического оракульного неравенства для среднеквадратического риска. Поскольку непараметрическое оценивание, как правило, имеет низкое качество, актуальной является задача его улучшения. Улучшенное оценивание для моделей регрессии в непрерывном времени с шумами, содержащими импульсные компоненты, стало возможным благодаря работам [2], [3]. В настоящем исследовании разработана процедура выбора моделей для адаптивного оценивания функции S, основанная на взвешенных улучшенных оценках МНК со специально подобранными весовыми коэффициентами, обеспечивающими асимптотическую эффективность оценки. Применение предложенной процедуры позволяет значительно улучшить неасимптотическое качество оценивания в непараметрических регрессионных моделях.

[20]Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 17-11-01049).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. V. Konev, S. Pergamenshchikov, “Efficient robust nonparametric estimation in a semimartingale regression model”, *Ann. Inst. Henri Poincaré Probab. Stat.*, **48**:4 (2012), 1217–1244.
2. E. Pchelintsev, “Improved estimation in a non-Gaussian parametric regression”, *Stat. Inference Stoch. Process.*, **16**:1 (2013), 15–28.
3. В. В. Конев, С. М. Пергаменщиков, Е. А. Пчелинцев, “Оценивание регрессии с шумами импульсного типа по дискретным наблюдениям”, *Теория вероятн. и ее примен.*, **58**:3 (2013), 454–471; англ. пер.: V. V. Konev, S. M. Pergamenshchikov, E. A. Pchelintsev, “Estimation of a regression with the pulse type noise from discrete data”, *Theory Probab. Appl.*, **58**:3 (2014), 442–457.

Родоченко В. В., Кудрявцев О. Е. (Ростов-на-Дону, Россия)**. Вычисление стоимости барьерного опциона в моделях со стохастической волатильностью, допускающих скачки, с использованием быстрой факторизации Винера–Хопфа**[21]**.**

Нами разработан новый метод, позволяющий быстро и точно вычислять цену барьерных опционов для широкого класса моделей со стохастической волатильностью, допускающих скачки. В качестве примера мы рассматриваем барьерный опцион пут с барьером снизу в модели Бейтса [1]. Подбирая подходящую замену для устранения корреляции между процессами цены и вариации (аналогично подходу [2]) и применяя процедуру рандомизации Карра, мы получаем возможность свести вычисление безарбитражной цены этого опциона к рекуррентному решению семейства одномерных задач, соответствующих узлам биномиального дерева.

Аппроксимируя процесс вариации CIR при помощи марковской цепи, получаем для каждого из узлов пару задач с фиксированной вариацией, каждая из которых может быть решена при помощи факторизации Винера–Хопфа. Поскольку явные выражения для факторов неизвестны, мы применяем приближенные формулы, представленные в статье [3], допускающие эффективную реализацию с использованием быстрого преобразования Фурье. Результаты численных экспериментов показывают быструю сходимость и точность используемого метода.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. D. S. Bates, “Jumps and stochastic volatility: exchange rate processes implicit in deutshe mark options”, *Rev. Financial Stud.*, **9** (1996), 69–107.
2. M. Briani, L. Caramellino, A. Zanette, “A hybrid approach for the implementation of the Heston model”, *IMA J. Manag. Math.*, **28**:4 (2017), 467–500.
3. O. Kudryavtsev, “Advantages of the Laplace transform approach in pricing first touch digital options in Lévy-driven models”, *Bol. Soc. Mat. Mex.* (3), **22**:2 (2016), 711–731.

[21] Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 15-32-01390).

Рохлин Д. Б. (Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону, Россия). **Центральная предельная теорема при наличии неопределенности и задача предсказания с использованием экспертных стратегий**[22]**.**

В первой части доклада рассматривается задача описания пределов вида

$$\mathscr{L} := \lim_{n\to\infty} \sup_{A_0^{n-1}\in\mathfrak{A}_0^{n-1}} f\left(n^{-1/2}\sum_{j=0}^{n-1} A_j\xi_{j+1}\right). \tag{1}$$

В типичной ситуации $(\xi_j)_{j=0}^{\infty}$ — последовательность независимых одинаково распределенных d-мерных случайных величин с нулевым средним и единичной ковариационной матрицей, либо последовательность независимых одномерных случайных величин с нулевым средним, удовлетворяющих условию Линдеберга. В первом случае $\mathfrak{A}_0^{n-1}$ — множество $\sigma(\xi_0,\dots,\xi_{n-1})$-согласованных последовательностей $(d\times d)$-матриц со значениями в компактном множестве Λ, а во втором — множество согласованных последовательностей со значениями на интервалах $[\underline{a}_j,\overline{a}_j]$, границы которых удовлетворяют некоторым условиям стабилизации при $j\to\infty$. Функция f предполагается непрерывной и ограниченной. Последовательности A_j описывают неопределенность модели, их также можно рассматривать как стратегии противника при игровой интерпретации задачи.

В работах [1], [2] было установлено, что предел (1) может быть выражен через вязкостное решение уравнения G-теплопроводности: $\mathscr{L} = v(0,0)$, где

$$-v_t(t,x) - \frac{1}{2}\sup_{A\in\Lambda}\operatorname{Tr}\bigl(AA^T v_{xx}(t,x)\bigr) = 0, \quad (t,x)\in[0,1)\times\mathbf{R}^d;$$
$$v(1,x) = f(x), \quad x\in\mathbf{R}^d.$$

Близкий результат был получен Ш. Пенгом (S. Peng, 2007) в рамках его теории сублинейных математических ожиданий. При этом по определению $u(0,0) = \widehat{\mathbf{E}}f(Y)$, где Y — G-нормально распределенная случайная величина и $\widehat{\mathbf{E}}$ — функционал сублинейного математического ожидания.

Во второй части доклада рассматривается задача предсказания индивидуальных последовательностей в режиме онлайн. Цель предсказания состоит в том, чтобы суммарная ошибка L_n после n-шагов была как можно ближе к суммарной ошибке $\min_{1\leqslant i\leqslant N} L_n^i$ лучшего эксперта из заданного конечного класса. Из теории динамического обучения (online learning) хорошо известно, что в типичной ситуации суммарное сожаление $R_n = L_n - \min_{1\leqslant i\leqslant N} L_n^i$ удовлетворяет оценке $R_n \leqslant C\sqrt{n}$. Весьма точную верхнюю оценку R_n в случае рандомизированных предсказаний дает секвенциальная сложность по Радемахеру (A. Rakhlin, K. Sridharan, A. Tewari, 2010). В работе [3] отмечено, что асимптотическое поведение этой величины при $n\to\infty$ определяется пределом вида (1). При этом, на языке теории сублинейных математических ожиданий, данный предел совпадает с ожидаемым значением наибольшей порядковой статистики многомерной G-нормальной случайной величины.

Схожие структуры возникают при предельном переходе в рекуррентном соотношении, определяющем функции Беллмана последовательной игры предсказания. Переход к пределу при $n\to\infty$ приводит к нелинейному параболическому уравнению типа Айзекса–Беллмана. Его гладкие суперрешения

[22] Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 17-19-01038).

специального вида соответствуют известным в теории динамического обучения потенциальным функциям и порождают алгоритмы взвешивания экспертных решений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. D. B. Rokhlin, “Central limit theorem under uncertain linear transformations”, *Statist. Probab. Lett.*, **107** (2015), 191–198.
2. D. B. Rokhlin, “Central limit theorem under variance uncertainty”, *Electron. Commun. Probab.*, **20** (2015), paper № 66, 10 pp.
3. D. B. Rokhlin, “Asymptotic sequential Rademacher complexity of a finite function class”, *Arch. Math.* (*Basel*), **108**:3 (2017), 325–335.

Рытова А. И. (Москва, Россия)**. Асимптотика моментов численностей частиц в ветвящемся случайном блуждании с тяжелыми хвостами**[23]**.**

Рассматривается непрерывное по времени ветвящееся случайное блуждание по многомерной решетке $\mathbf{Z}^d$, $d \geqslant 1$. Предполагается, что в начальный момент времени на $\mathbf{Z}^d$ находится одна частица, которая блуждает по точкам $\mathbf{Z}^d$ до тех пор, пока не попадет в выделенную точку $x_0 \in \mathbf{Z}^d$, где может погибнуть или дать случайное число потомков того же типа, которые затем эволюционируют независимо друг от друга по тому же закону. Лежащее в основе процесса случайное блуждание частиц предполагается симметричным, однородным по пространству и неприводимым. Такие ветвящиеся случайные блуждания изучались многими авторами (см., например, работу [1] и библиографию в ней). Основными объектами исследования являются численности частиц в каждой точке $\mathbf{Z}^d$, а также общая численность частиц. Как правило, такие модели изучались в предположении конечности дисперсии скачков случайного блуждания, поэтому представляет интерес возникновение новых эффектов, к которым может привести отказ от этого предположения. В работе [2] на переходные интенсивности случайного блуждания накладывалось условие

$$\lim_{\|z\|\to\infty} a(0,z)\|z\|^{d+\alpha} = H\left(\frac{z}{\|z\|}\right),$$

где $\alpha \in (0,2)$ и $H\colon \mathbf{S}^{d-1} \to \mathbf{R}$, $H(x) = H(-x)$, $x \in \mathbf{S}^{d-1}$ — непрерывная положительная функция. В результате все свойства случайного блуждания сохраняются, кроме конечности дисперсии скачков. Такое блуждание может быть невозвратным даже на решетках низких размерностей $d = 1, 2$ (см. [2]). По схеме, предложенной в [1], для случая бесконечной дисперсии скачков были получены асимптотики переходных вероятностей (см. [3]), уравнения для производящих функций, дифференциальные и интегральные уравнения для моментов численностей частиц, а также изучено асимптотическое поведение их решений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Е. Б. Яровая, *Ветвящиеся случайные блуждания в неоднородной среде*, Центр прикл. исслед. при мех.-матем. ф-те МГУ, М., 2007, 104 с.

[23] Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 17-01-00468-а).

2. E. Yarovaya, "Branching random walks with heavy tails", *Comm. Statist. Theory Methods*, **42**:16 (2013), 3001–3010.
3. А. И. Рытова, Е. Б. Яровая, "Многомерная лемма Ватсона и ее применение", *Матем. заметки*, **99**:3 (2016), 395–403; англ. пер.: A. I. Rytova, E. B. Yarovaya, "Multidimensional Watson lemma and its applications", *Math. Notes*, **99**:3 (2016), 406–412.

Ситник С. М. (Воронеж, Россия)**. Неравенства типа Турана и их применения в вероятностных задачах**[24]**.**

Неравенства типа Турана, которые устанавливают логарифмическую выпуклость по параметрам или аргументам специальных функций, в настоящее время получили многочисленные приложения в различных теоретических и прикладных задачах. Отметим работы [1]–[4], в которых подобные неравенства были получены для различных типов специальных функций: ортогональных многочленов, функций Бесселя и их модификаций, гипергеометрических функций и их обобщений, функций Миттаг-Леффлера и др.

В докладе рассматриваются приложения результатов из работ [1]–[4] к задачам стохастической математики, теории вероятностей и математической статистики и финансовой математики. Эти приложения включают задачи получения оценок параметров совместного распределения Пуассона и оценок максимального правдоподобия для смесей распределений Ватсона, оптимизации прогнозов рисков для одной модели кредитования банком заемщиков, сходимости итерационных алгоритмов в задаче о блокирующих вероятностях, оптимизации «хвостов» распределения Бернулли.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. D. Karp, S. M. Sitnik, "Log-convexity and log-concavity of hypergeometric-like functions", *J. Math. Anal. Appl.*, **364**:2 (2010), 384–394.
2. S. M. Sitnik, Kh. Mehrez, "Proofs of some conjectures on monotonicity of ratios of Kummer, Gauss and generalized hypergeometric functions", *Analysis* (*Berlin*), **36**:4 (2016), 263–268.
3. Kh. Mehrez, S. M. Sitnik, "On monotonicity of ratios of some q-hypergeometric functions", *Mat. Vesn.*, **68**:3 (2016), 225–231.
4. С. М. Ситник, Х. Мехрез, "Монотонность отношений некоторых гипергеометрических функций", *Сиб. электрон. матем. изв.*, **13** (2016), 260–268.

Смородина Н. В. (Санкт-Петербург, Россия)**. Представление решений начально-краевых задач средними значениями функционалов от отражающихся от границы процессов**[25]**.**

Для уравнения $\partial u/\partial t = (\sigma^2/2)\Delta u$ рассмотрим начально-краевую задачу в ограниченной области $D \subset \mathbf{R}^2$, имеющей гладкую границу ∂D, с начальным условием $u(0,x) = f(x)$ и граничным условием Неймана $(\partial u/\partial n)|_{\partial D} = (\partial f/\partial n)|_{\partial D}$, где n обозначает единичную внешнюю нормаль к граничной кривой ∂D. Для решения начально-краевой задачи в случае, когда $(\partial f/\partial n)|_{\partial D} = 0$,

[24] Работа выполнена при поддержке Министерства образования и науки РФ (соглашение № 02.A03.21.0008).

[25] Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 15-01-01453).

справедливо представление $u(t,x) = \mathbf{E}f(X_x(t))$, где $X_x(t)$ — винеровский процесс $\sigma w(t)$, выпущенный из точки $x \in D$ и отражающийся от границы при ее достижении. Следует отметить, что построение отражающегося от границы процесса $X_x(t)$ весьма сложно технически (сложность обусловлена тем, что траектории винеровского процесса ни в одной точке не дифференцируемы) и связано с решением так называемой задачи Скорохода (см. [1]). Решением задачи Скорохода для области D является построение для каждой (неслучайной) непрерывной траектории, стартующей из произвольной точки $x \in D$, ее «отражающейся от границы» версии. Разрешимость задачи Скорохода доказана для широкого класса областей, подробный обзор результатов можно найти в работе [2]. Отметим здесь два обстоятельства. Во-первых, для гладкой кривой ее «отражающаяся» в смысле Скорохода версия не совпадает с ее классическим отражением (при котором нормальная компонента касательного вектора кривой меняет свой знак на противоположный при достижении кривой границы области). Во-вторых, сложности с решением задачи Скорохода усугубляются еще и тем, что далеко не всегда удобно рассматривать процессы только с непрерывными траекториями, часто гораздо удобнее бывают процессы с кусочно постоянными траекториями. А это, в свою очередь, приводит к необходимости заново решать задачу Скорохода.

Нами предложен новый способ построения вероятностного представления решения начально-краевой задачи, основанный на построении специального продолжения начальной функции с области на всю плоскость. Мы будем использовать винеровский процесс $\sigma w(t)$, но заставим его «почувствовать» границу области, специальным образом продолжая начальную функцию f с области D на всю плоскость.

Для каждого фиксированного $x \in D$ строится свое представление F^x начальной функции f в виде ряда из целых функций на $\mathbf{C}^2$, при этом указанный ряд сходится к функции f в любом круге D_x с центром в точке x, целиком лежащем в $\overline{D}$.

Вероятностное представление решения $u(t,x)$ начально-краевой задачи имеет вид $u(t,x) = \lim_{M\to\infty} \mathbf{E}F^x_M(x + \sigma w(t))$, где F^x_M обозначает M-ю частичную сумму ряда, задающего функцию F^x. Функции F^x_M в последней формуле при каждом фиксированном M являются целыми аналитическими функциями на $\mathbf{C}^2$, что позволило получить вероятностное представление решения также и для комплексных σ, удовлетворяющих условию $\operatorname{Re}\sigma^2 \geqslant 0$ (в частности, для уравнения Шрёдингера). Также было показано, что в этом вероятностном представлении винеровский процесс может быть заменен подходящим случайным блужданием.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. А. В. Скороход, “Стохастические уравнения для процессов диффузии с границами”, *Теория вероятн. и ее примен.*, **6**:3 (1961), 287–298; англ. пер.: A. V. Skorokhod, “Stochastic equations for diffusion processes in a bounded region”, *Theory Probab. Appl.*, **6**:3 (1961), 264–274.
2. A. Pilipenko, *An introduction to stochastic differential equations with reflection*, Lect. Pure Appl. Math., **1**, Potsdam Univ. Press, Potsdam, 2014, ix+75 pp.

Сухинов А. И. (Ростов-на-Дону, Россия)**, Никитина А. В.** (Ростов-на-Дону, Россия)**, Сидорякина В. В.** (Таганрог, Россия)**, Семенякина А. А.** (Таганрог, Россия)**. Обоснование и моделирование коэффициента турбулентного обмена водоемов на основе стохастического метода**[26]**.**

Для описания турбулентных течений в водоемах зачастую используются стохастические методы, а различные флуктуирующие величины рассматриваются как случайные функции. Турбулентность на диссипативных масштабах имеет сложную статистическую структуру, обусловленную сильной перемежаемостью. В ходе экспедиционных исследований мелководных водоемов — Азовское море и лагуна Этан де Бер — были получены данные о пульсациях скоростей водного потока в некоторых точках водоемов с помощью зонда ADCP (Acoustic Doppler Current Profiler) WHS600 Sentinel. Среди различных аппроксимаций коэффициента вертикального турбулентного обмена наилучшим образом себя проявили алгебраические подсеточные модели, основанные на определении турбулентных потоков как осредненных по пространству или времени (корреляции) произведений отклонений составляющих скорости течений и переносимой физической величины.

На больших масштабах вертикальных сеток при численном моделировании подавляются механизмы вертикального турбулентного обмена, что определяет необходимость выбора достаточно малых масштабов вертикального разрешения. На основе статистических данных о поле скоростей водного потока и подсеточных моделей Монина и Смагоринского [1] был рассчитан коэффициент вертикального турбулентного обмена для Азовского моря и лагуны Этан де Бер.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. А. С. Монин, “Турбулентность и микроструктура в океане”, *УФН*, **109**:2 (1973), 333–354.

Турова Т. С. (Лунд, Швеция)**. Кулоновы системы в физике и биологии.**

Мы рассматриваем систему частиц на конечном интервале с кулоновским взаимодействием ближайших соседей и внешней силой. Эта модель была определена в [1] для того, чтобы исследовать поток заряженных частиц на строгом математическом уровне. В дальнейшем мы предполагаем развивать подобные модели для описания (электрической) активности в нейронных сетях. В работе [1] было доказано, что в случае нулевой температуры (основные состояния) существуют фазовые переходы в структуре конфигураций зарядов при различных значениях внешних сил.

Локальная структура гиббсовских конфигураций при положительной температуре, но без внешней силы была исследована в [2], где также были рассмотрены взаимодействия более общего вида. Было доказано, что при любой положительной температуре конфигурации существенно локализованы в минимуме энергии.

[26]Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 17-11-01286).

Продолжая работу [2], рассмотрим гиббсовские конфигурации при наличии внешней силы. В [3] получена асимптотика для средних и дисперсий расстояний между соседними зарядами. Мы предполагаем, что сила постоянна на всем интервале. Заметим, что в [1] уже обсуждались более общие формы внешней силы. Мы также обсуждаем возможность обобщения наших методов и результатов на более интересные модели, учитывающие особенности моделирования нейронных сетей. Простота рассматриваемой модели позволяет различать пять фаз. В сочетании с результатами работы [1] это позволяет предположить непрерывность распределения при нулевой температуре. Мы доказываем, что для слабой силы заряды почти равномерно распределены по всему интервалу, как было замечено и в случае нулевой силы в [2]; при критических значениях внешней силы заряды занимают только конечную часть интервала, а когда сила принимает значения выше критического, то все заряды концентрируются в одном из концов интервала. Заметим, что здесь фазовые переходы (в соответствии со значением внешней силы) наблюдаются при любой положительной температуре.

Методы, используемые в [3], суть развитие вероятностного подхода статьи [2], но теперь в условиях неоднородности.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. В. А. Малышев, “Фазовые переходы в одномерной кулоновской среде”, *Пробл. передачи информ.*, **51**:1 (2015), 36–41; англ. пер.: V. A. Malyshev, “Phase transitions in the one-dimensional Coulomb medium”, *Problems Inform. Transmission*, **51**:1 (2015), 31–36.
2. V. A. Malyshev, A. A. Zamyatin, “One-dimensional Coulomb multiparticle systems”, *Adv. Math. Phys.*, **2015** (2015), 857846, 9 pp.
3. T. S. Turova, *Phase transitions in the one-dimensional Coulomb gas ensembles*, arXiv: 1606.04479.

Углич С. И. (Ростов-на-Дону, Россия)**. Об оптимизации квазилинейных систем с несколькими случайными приоритетами**[27]**.**

Исследуются вопросы оптимизации квазилинейных моделей, описывающих взаимодействие (в единой системе) различных конкурирующих структур с учетом случайной расстановки приоритетов сторонним лицом — арбитром, принимающим решения на основе экспертных рекомендаций.

В настоящем докладе рассматривается модель, предполагающая, что в системе фигурируют три структуры, а приоритеты α_i $(i=1,2,3)$ — произвольные равномерно распределенные случайные величины, каждая из которых принимает значения на отрезке $[0,1]$. Пусть $F=\mathbf{E}(F_1^{\alpha_1}F_2^{\alpha_2}F_3^{\alpha_3})$ — целевая функция арбитра, где F_i — линейные функции от n переменных, рассматриваемые на области их положительности. Изучаются два случая: когда случайные величины независимы и когда $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=1$ (в случае двух приоритетов см. соответственно [1] и [2]). Используя специальные вычислительные процедуры, удалось показать, что в каждом из этих случаев функция F принимает максимальное значение $F_{\max}$ на пересечении гиперплоскостей $\sum_{i=1}^n a_{ij}x_i=t_j^\star$,

[27] Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 16-01-00184-а).

$j = 1, 2$, где $t_1^\star$, $t_2^\star$ — корни некоторой системы двух трансцендентных уравнений, зависящих от отрицательных параметров c_1 и c_2 (естественно, для каждого случая решается своя система). Параметры c_j являются коэффициентами представления функции $\sum_{i=1}^n a_{i3}x_i$, входящей в состав F_3, через функции $\sum_{i=1}^n a_{ij}x_i$, входящие в состав F_i, $i = 1, 2$. Численно решена задача минимизации функции $F_{\max}(c_1, c_2)$. Показано, что эта функция имеет минимальное значение. Это значение можно интерпретировать как оптимальную сумму средств, которую арбитр должен выделить для нормального функционирования системы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. В. С. Вагин, И. В. Павлов, “Моделирование и оптимизация квазилинейных сложных систем с учетом вероятностного характера приоритетов”, *Вестн. РГУПС*, 2016, № 1, 135–139.
2. Н. П. Красий, “Оптимизация квазилинейных моделей систем с двумя структурами и независимыми приоритетами”, *Междунар. науч.-исслед. журн.*, 2016, № 11(53), 161–165.

Цветкова И. В. (Ростов-на-Дону, Россия)**. Программная реализация вычисления канонического хеджа для неполных рынков со счетным числом состояний**[28]**.**

Рассматривается статический $(1, Z)$-рынок, заданный на $(\Omega, \mathbf{F})$, где $\mathbf{F} = (\mathscr{F}_k)_{k=0}^1$, $\mathscr{F}_0 = \{\Omega, \varnothing\}$, $\mathscr{F}_1 = \sigma(B_1, B_2, \dots)$. Пусть $Z = (Z_k, \mathscr{F}_k)_{k=0}^1$ есть $\mathbf{F}$-адаптированный случайный процесс (дисконтированная стоимость акции). Если рассматриваемый рынок не полон, то переход к полному осуществляется с помощью построения интерполяционного рынка. Для этого рассмотрим специальную хааровскую интерполирующую фильтрацию $\mathbf{H} = (\mathscr{H}_n)_{n=0}^\infty$, где $\mathscr{H}_0 = \mathscr{F}_0$, $\mathscr{H}_1 = \sigma\{B_{n_1}\}$, $\mathscr{H}_2 = \sigma\{B_{n_1}, B_{n_2}\}$, $\dots$, $\mathscr{H}_\infty = \sigma\{B_{n_1}, B_{n_2}, \dots\} = \mathscr{F}_1$ и $\{n_i\}_{i=1}^\infty$ — произвольная фиксированная перестановка натуральных чисел. Пусть мартингальная мера P обладает ослабленным свойством универсальной хааровской единственности (ОСУХЕ) [1]. Построим мартингальную хааровскую интерполяцию $Y = (Y_n, \mathscr{H}_n, P)_{n=0}^\infty$ случайного процесса Z: $Y_n = \mathbf{E}^P[Z_1 \mid \mathscr{H}_n]$. Рынок, интерполирующий исходный, является полным, поэтому для любого финансового обязательства существует реплицирующий его самофинансируемый портфель $\pi = (\beta_n, \gamma_n)_{n=0}^\infty$. При практическом расчете компонент портфеля π мы используем квантильное хеджирование. Для этого по любому сколь угодно малому ε (точность вычисления) определяется вычислительный горизонт N: $\sum_{i=1}^N \mathbf{P}(B_{n_i}) > 1 - \varepsilon$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. I. Pavlov, “Some processes and models on deformed stochastic bases”, *Proceedings of the* 2016 2*nd international symposium on stochastic models in reliability engineering*, *life science and operations management* (SMRLO’16, Beer Sheva, Israel, February 15–18, 2016), IEEE Computer Soc., Washington, DC, 432–437.

[28] Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 16-01-00184-а).

Чистяков А. Е. (Ростов-на-Дону, Россия)**, Тимофеева Е. Ф.** (Ставрополь, Россия)**. Обработка натурных экспериментов для определения параметров морских волн на основе стохастических подходов**[29]**.**

Задача теоретических исследований волновых процессов в стохастических неоднородных средах состоит в изучении различных явлений, сопровождающих распространение волн, и определении стохастических характеристик волновых полей. При изучении волновых гидродинамических процессов, происходящих в мелководных водоемах, нами был проведен натурный эксперимент, суть которого заключалась в следующем: измерительный механизм погружался на различную глубину и в течение минуты с использованием видеокамеры производилась запись волновых колебаний. Данные, полученные в ходе эксперимента, требовалось обработать. Первичная обработка видеоматериалов, имеющая целью определение значения (зависящей от времени) функции возвышения уровня водной среды, выполнена при помощи методов распознавания образов. Разработанный алгоритм и его численная реализация позволяют достаточно точно определить значение функции возвышения уровня. При помощи статистических и спектральных методов получены следующие параметры волновых процессов: спектр, средняя частота, а также проверены гипотезы о том, что спектр функции возвышения уровня распределен по нормальному и логнормальному законам. Показано, что волновые процессы можно описать тремя величинами: математическим ожиданием (период волны), дисперсией и максимальным значением спектра. Значения этих величин были получены при обработке данных натурного эксперимента. Полученные величины используются в качестве начальных данных разработанных математических моделей волновых гидродинамических процессов [1].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. А. И. Сухинов, А. Е. Чистяков, Е. Ф. Тимофеева, А. В. Шишеня, “Математическая модель расчета прибрежных волновых процессов”, *Матем. моделирование*, **24**:8 (2012), 32–44; англ. пер.: A. I. Sukhinov, A. E. Chistyakov, E. F. Timofeeva, A. V. Shishenya, “Mathematical model for calculating coastal wave processes”, *Math. Models Comput. Simul.*, **5**:2 (2013), 122–129.

Шамраева В. В. (Ростов-на-Дону, Россия)**. О существовании специальных интерполяционных мартингальных мер, допускающих преобразование неполных финансовых рынков в полные**[30]**.**

Пусть $(\Omega, \mathbf{F})$ — пространство с фильтрацией $\mathbf{F} = (\mathscr{F}_0, \mathscr{F}_1)$, где $\mathscr{F}_0 = \{\Omega, \varnothing\}$ и $\mathscr{F}_1 = \sigma\{B_i,\, i \in \mathbf{N} = \{1, 2, \dots\}\colon \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i = \Omega, B_i \cap B_j = \varnothing\ (i \neq j)\}$. Рассмотрим случайный процесс $Z = (Z_n, \mathscr{F}_n)_{n=0}^{1}$, где $Z_0 := a$, $Z_1|_{B_i} := b_i$. Через $\mathscr{P}(Z, \mathbf{F})$ обозначим множество невырожденных мартингальных мер процесса Z.

Определение. Будем говорить, что $P \in \mathrm{NBC}$ (P удовлетворяет *условию несовпадения барицентров*), если ряд $\sum_{i=1}^{\infty} b_i p_i$ абсолютно сходится и $\sum_I b_i p_i / \sum_I p_i \neq \sum_J b_j p_j / \sum_J p_j$ для любых $I, J \subset \mathbf{N}$ таких, что $I \cap J = \varnothing$, $|I| \leqslant |J|$.

[29] Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 17-11-01286).

[30] Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 16-01-00184-а).

В работах [1], [2] установлено, что в случае конечной σ-алгебры $\mathscr{F}_1$ множество NBC непусто, если $\mathscr{P}(Z,\mathbf{F}) \neq \varnothing$ и $a \neq b_i$ для любого i. Отметим, что до настоящего времени вопрос о непустоте NBC в случае счетнопорожденной $\mathscr{F}_1$ оставался открытым и не было построено ни одного примера мартингальной меры, удовлетворяющей NBC. Следующая теорема дает частичный ответ на данный вопрос.

Теорема. *Пусть* $b_1 < a < b_2 < b_3 < b_4 < \cdots$, *причем* $b_i - b_{i-1} \geqslant b_{i-1}$ *для любого* $i \geqslant 2$. *Тогда* $\mathrm{NBC} \neq \varnothing$.

Если неравенство в определении NBC выполняется лишь для таких I и J, для которых $|I| = 1$, а $\mathbf{N} \setminus J$ конечно, то получаем определение *ослабленного условия несовпадения барицентров* и соответствующего множества WNBC. В работах [2], [3] получены достаточные условия, обеспечивающие непустоту WNBC.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. М. Н. Богачева, И. В. Павлов, “О хааровских расширениях безарбитражных финансовых рынков до безарбитражных и полных”, *УМН*, **57**:3(345) (2002), 143–144; англ. пер.: M. N. Bogacheva, I. V. Pavlov, “Haar extensions of arbitrage-free financial markets to markets that are complete and arbitrage-free”, *Russian Math. Surveys*, **57**:3 (2002), 581–583.
2. И. В. Павлов, И. В. Цветкова, В. В. Шамраева, “Некоторые результаты о мартингальных мерах одношаговых моделей финансовых рынков, связанные с условием несовпадения барицентров”, *Вестн. РГУПС*, 2012, № 3(47), 177–181.
3. И. В. Павлов, В. В. Шамраева, И. В. Цветкова, “О существовании мартингальных мер, удовлетворяющих ослабленному условию несовпадения барицентров, в случае счетного вероятностного пространства”, *Теория вероятн. и ее примен.*, **61**:1 (2016), 173–181; англ. пер.: I. V. Pavlov, V. V. Shamraeva, I. V. Tsvetkova, “On the existence of martingale measures satisfying the weakened condition of noncoincidence of barycenters in the case of countable probability space”, *Theory Probab. Appl.*, **61**:1 (2017), 167–175.

Шатских С. Я., Мелкумова Л. Э. (Самара, Россия)**. Метод максимального правдоподобия в теореме де Финетти**[31]**.**

Рассмотрим на пространстве $\{\mathbf{R}^\infty, \mathscr{B}(\mathbf{R}^\infty)\}$ «координатные» случайные величины $e_k(\mathbf{z}) = z_k$, $\mathbf{z} = (z_1, \dots, z_n, \dots) \in \mathbf{R}^\infty$, $k = 1, \dots, \infty$. Для условной функции распределения $F(x|y)$, которая удовлетворяет «классическим условиям регулярности» [1], введем семейство вероятностных мер $\mathscr{P} = \{\mu_g\}$ с симметрическими конечномерными распределениями

$$\mu_g\{\mathbf{z}\colon e_k(\mathbf{z}) \leqslant x_k,\, k = \overline{1,n}\} = \int_0^\infty \prod_{k=1}^n F(x_k|y) g(y)\, dy, \qquad n = 1, \dots, \infty, \qquad (*)$$

где $g(y)$ — положительные на $[0, +\infty)$ плотности вероятностей. Представление $(*)$ согласно теореме де Финетти следует из условной независимости и одинаковой распределенности бесконечной последовательности перестановочных

[31]Исследование выполнено при поддержке РФФИ (гранты № 16-01-00184-а, 16-41-630676).

случайных величин относительно некоторой случайной величины $s^*(\mathbf{z})$ (или порождаемой ею σ-алгебры). Известны различные подходы к построению случайной величины $s^*(\mathbf{z})$ (см. [2]–[4]).

В нашей работе на основе представления $(*)$ рассматривается построение $s^*(\mathbf{z})$ с помощью метода максимального правдоподобия.

На основе функции правдоподобия

$$L(y; e_1(\mathbf{z}), \dots, e_n(\mathbf{z})) = \prod_{k=1}^{n} F(e_k(\mathbf{z})|y), \qquad y \in [0, \infty),$$

введем последовательность оценок максимального правдоподобия (ОМП)

$$s_n(\mathbf{z}) \in \operatorname*{argmin}_{y \in [0,\infty)} L\bigl(y; e_1(\mathbf{z}), \dots, e_n(\mathbf{z})\bigr).$$

Теорема. *При выполнении «классических условий регулярности» существуют последовательность ОМП $\{s_n(\mathbf{z})\}$ и статистика $s^*(\mathbf{z})$ со свойствами:*

1) $\mu_g\{\mathbf{z}\colon s_n(\mathbf{z}) \to s^*(\mathbf{z})\} = 1$ *для любой* $\mu_g \in \mathscr{P}$;

2) $\mu_g\{\mathbf{z}\colon s^*(\mathbf{z}) \leqslant x\} = \int_0^x g(y)\,dy$ *для любой* $\mu_g \in \mathscr{P}$;

3) *для полных семейств плотностей* $\{g(y)\}$ *(показательные, гамма-) статистика* $s^*(\mathbf{z})$ *является полной для семейств вероятностей* μ_g;

4) *имеют место соотношения*

$$\mu_g\{\mathbf{z}\colon e_k(\mathbf{z}) \leqslant x_k,\ k = 1, \dots, n \mid s^*(\mathbf{z}) = y\} = \prod_{k=1}^{n} \mu_g\{\mathbf{z}\colon e_k(\mathbf{z}) \leqslant x_k \mid s^*(\mathbf{z}) = y\}$$

$$= \prod_{k=1}^{n} F(x_k|y), \qquad y \in [0, \infty),$$

— *нет зависимости от плотности* $g(y)$.

Рассмотрены примеры ОМП для плотностей $f(x|y)$ из однопараметрических экспоненциальных семейств [5].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. A. W. van der Vaart, *Asymptotic statistics*, Camb. Ser. Stat. Probab. Math., **3**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1998, xvi+443 pp.
2. Y. S. Chow, H. Teicher, *Probability theory. Independence, interchangeability, martingales*, 3rd ed., Springer Texts Statist., Springer, New York, 2003, xxii+488 pp.
3. J. F. C. Kingman, “Uses of exchangeability”, *Ann. Probab.*, **6**:2 (1978), 183–197.
4. Е. М. Кнутова, С. Я. Шатских, “Асимптотические свойства условных квантилей для одного класса симметрических распределений”, *Теория вероятн. и ее примен.*, **51**:2 (2006), 374–382; англ. пер.: E. M. Knutova, S. Ya. Shatskikh, “Asymptotic properties of conditional quantiles for a class of symmetric distributions”, *Theory Probab. Appl.*, **51**:2 (2007), 350–358.
5. E. L. Lechmann, G. Casella, *Theory of point estimation*, 2nd ed., Springer Texts Statist., Springer-Verlag, New York, 1998, xxvi+589 pp.

Ширяев А. Н. (Математический институт им. В. А. Стеклова Российской академии наук, Москва, Россия), **Файнберг Е. А.** (Университет Стоуни Брук, США). **О прямых и обратных уравнениях Колмогорова общих скачкообразных марковских процессов**[32]**.**

Для определения общего скачкообразного марковского процесса сначала вводится Q-функция $q(x,t,B)$, удовлетворяющая двум условиям:

(a) для $x \in X$, $t \in [T_0, T_1)$ функция $q(x,t,\cdot)$ является мерой со знаком на пространстве состояний $(X, \mathscr{B}(X))$ (стандартном борелевском пространстве) и обладает свойствами $q(x,t,X) \leqslant 0$ и $0 \leqslant q(x,t,B \setminus \{x\}) < \infty$ для всякого $B \in \mathscr{B}(X)$;

(b) для всякого $B \in \mathscr{B}(X)$ функция $q(x,t,B)$ измерима по (x,t).

Мы предполагаем также, что функция q локально L_1-ограничена, т.е.

(c) $\int_{T_0}^{s} q(x,t)\,dt < \infty$ для каждого $s \in (T_0, T_1)$, где $q(x,t) = -q(x,t,\{x\})$.

Пусть Ω — пространство всех последовательностей $\omega = (t_0, x_0, t_1, x_1, \dots)$, $t_0 = T_0$, и $(t_n, x_n)_{n \geqslant 0}$ — мультивариантный точечный процесс на $(\Omega, \mathscr{F})$. С каждой Q-функцией q, удовлетворяющей условию (c), можно связать случайную (предсказуемую) меру ν: для $t \in [T_0, T_1)$ и $B \in \mathscr{B}(X)$

$$\nu(\omega, [T_0, t), B) = \int_{T_0}^{t} \sum_{n \geqslant 0} I(t_n < s \leqslant t_{n+1}) q(x_n, s, B \setminus \{x_n\})\,ds.$$

Мера ν и вероятностная мера γ на X определяют (Ж. Жакод, 1975) вероятностную меру P на $(\Omega, \mathscr{F})$ такую, что $P(x_0 \in B) = \gamma(B)$, $B \in \mathscr{B}(X)$, при этом ν есть компенсатор случайной меры μ мультивариантного точечного процесса $(t_n, x_n)_{n \geqslant 0}$.

Процесс

$$X_t(\omega) = \sum_{n \geqslant 0} I(t_n \leqslant t < t_{n+1}) x_n, \qquad t \in [T_0, T_1),$$

называют общим скачкообразным марковским процессом.

Определим функции (В. Феллер) $\overline{P}^{(0)}(u,x;t,B) = I(x \in B) e^{-\int_u^t q(x,s)\,ds}$ и

$$\overline{P}^{(n)}(u,x;t,B) = \int_u^t \int_X e^{-\int_u^t q(x,\theta)\,d\theta} q(x,s,dy \setminus \{x\}) \overline{P}^{(n-1)}(s,y;t,B)\,ds, \qquad n \geqslant 1.$$

Положим также $\overline{P}(u,x;t,B) = \sum_{n=0}^{\infty} \overline{P}^{(n)}(u,x;t,B)$.

Мы показываем, что $\overline{P}(u,x;t,B)$ является переходной функцией и удовлетворяет (при условии (c)) обратному уравнению Колмогорова

$$\frac{\partial}{\partial u} P(u,x;t,B) = q(x,u) P(u,x;t,B) - \int_X q(x,u,dy \setminus \{x\}) P(u,y;t,B).$$

Если $\overline{P}(u,x;t,B) = 1$ для всех u, x, t, то $\overline{P}$ — единственное решение этого уравнения.

[32] Исследование А. Н. Ширяева выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 14-21-00162) в Математическом институте им. В. А. Стеклова Российской академии наук. А. Н. Ширяевым выполнено исследование прямых уравнений.

Показано также, что в предположении локальной ограниченности q (т.е. $\sup_{t\in[T_0,s)} < \infty$, $s \in [T_0, T_1)$, $x \in X$) функция $\overline{P}$ является *минимальным* решением прямого уравнения Колмогорова

$$\frac{\partial}{\partial t} P(u,x;t,B) = -\int_B q(y,t)\, P(u,x;t,dy) + \int_X q(y,t,B\setminus\{y\})\, P(u,x;t,dy).$$

Детально исследуются свойства прямых и обратных уравнений.

Ширяева Л. К. (Самара, Россия)**. О свойствах трехпараметрической копула-функции Граббса.**

Рассматриваются статистики

$$T_{n,(1)} = (\overline{X} - \min\{X_i\})/S \quad \text{и} \quad T_n^{(1)} = (\max\{X_i\} - \overline{X})/S,$$

т.е. экстремальные стьюдентизированные отклонения наблюдений от среднего, вычисляемые по выборке объема n (см. [1]). Предполагается, что в нормально распределенной выборке $\{X_i\}_{i=1}^n$ имеется одно аномальное наблюдение X_{out} (его номер неизвестен). Таким образом, выброс X_{out} отличается от остальных наблюдений параметром сдвига α и параметром масштаба $\nu > 0$. Пусть $G_{n,(1)}(x;\alpha,\nu) = \mathbf{P}(T_{n,(1)} < x)$, $G_n^{(1)}(x;\alpha,\nu) = \mathbf{P}(T_n^{(1)} < x)$ и $\Upsilon_n(x,y;\alpha,\nu) = \mathbf{P}(\{T_{n,(1)} < x\} \cap \{T_n^{(1)} < y\})$. Рекурсивные соотношения для описания функций распределения статистик Граббса $T_{n,(1)}$ и $T_n^{(1)}$ найдены в [2]. Из совместного распределения $\Upsilon_n(\,\cdot\,)$ посредством инверсии извлекается трехпараметрическая копула. Анализируются графики смоделированных значений из копулы. Устанавливается, что копула позволяет описывать отрицательные взаимозависимости между случайными величинами. В случае $\alpha = 0$ копула становится симметричной. Исследуется влияние параметров копулы n, α и ν на ее коэффициенты хвостовой зависимости. Доказывается существование области, в которой копула совпадает с нижней границей Фреше–Хёффдинга. Исследуется влияние параметров копулы на границу этой области.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. F. E. Grubbs, “Sample criteria for testing outlying observations”, *Ann. Math. Statist.*, **21**:1 (1950), 27–58.
2. Л. К. Ширяева, “О распределении статистик Граббса в случае нормально распределенной выборки с выбросом”, *Изв. вузов. Матем.*, 2017, № 4, 84–101; англ. пер.: L. K. Shiryaeva, “On distrubution of Grubbs’ statistics in case of normal sample with outlier”, *Russian Math.* (*Iz. VUZ*), **61**:4 (2017), 72–88.

Шишкина Э. Л. (Воронеж, Россия)**. Дробное уравнение Эйлера–Пуассона–Дарбу и случайные блуждания**[33]**.**

Марковский случайный процесс «блуждание фиктивной частицы», при котором изменение направления движения подчиняется неоднородному пуассоновскому процессу, приводит к общему гиперболическому уравнению второго порядка с коэффициентами, зависящими от времени (см. [1]). В случае, когда

[33] Работа выполнена при поддержке Министерства образования и науки РФ (соглашение № 02.A03.21.0008).

марковский случайный процесс замедлен, мы получаем следующую задачу для дробного уравнения Эйлера–Пуассона–Дарбу:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\frac{2\alpha}{t}\,\frac{\partial}{\partial t}\right)^{\beta}p(x,t)=\frac{\partial^2 p(x,t)}{\partial x^2},\qquad \beta\in\left(0,\frac{1}{2}\right),\tag{1}$$

$$p(0,t)=\delta_{2\alpha}(t),\qquad p_t(0,t)=0,\tag{2}$$

где $t>0$, $x\in\mathbf{R}$, $p=p(x,t)$ — закон случайного блуждания частиц в пространстве $\mathbf{R}^n$, α/t — интенсивность неоднородного пуассоновского процесса, $\alpha>0$, дробная производная Бесселя $(\partial^2u/\partial t^2+(2\alpha/t)\partial u/\partial t)^{\beta}$ определена в [2], весовая обобщенная функция $\delta_{2\alpha}$ определена в [3]. В докладе рассматривается следующий основной результат.

Теорема. *Решение задачи* (1), (2) *имеет вид*

$$p(x,t)=[(\mathbf{H}^{-1})_{\xi}\,\mathrm{ch}(x\xi^{\alpha})](t),$$

где $(\mathbf{H}^{-1})_{\xi}$ *— обратное преобразование с функцией Фокса в ядре, построенное в явном виде.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. R. Garra, E. Orsingher, “Random flights related to the Euler–Poisson–Darboux equation”, *Markov Process. Related Fields*, **22**:1 (2016), 87–110.
2. E. L. Shishkina, S. M. Sitnik, “On fractional powers of Bessel operators”, *J. Inequal. Spec. Funct.*, **8**:1 (2017), 49–67.
3. И. А. Киприянов, *Сингулярные эллиптические краевые задачи*, Наука, М., 1997, 204 с.

Якымив А. Л. (Москва, Россия)**. О логарифме порядка случайной A-подстановки.**

Пусть S_n — группа всех перестановок множества $\{1,2,\dots,n\}$. Через $M(\sigma)$ обозначим порядок перестановки σ из S_n. Наглядным примером одного из преимуществ вероятностного подхода к задачам комбинаторики является следующий. В [1] доказано, что случайная величина $\ln M(\sigma_n)$ асимптотически нормальна со средним $(\ln^2 n)/2$ и дисперсией $(\ln^3 n)/3$, где σ_n — случайная перестановка, равномерно распределенная на S_n. Действительно, согласно [2], порядок подстановок из S_n изменяется в весьма широких пределах: от 1 (порядка тождественной подстановки) до $\exp\{(1+\delta(n))\sqrt{n\ln n}\}$ (максимального порядка), где $\delta(n)\to 0$. Из [1] следует, что существует последовательность $\varepsilon(n)\downarrow 0$ такая, что взятая «наугад» случайная подстановка из S_n имеет порядок от $\exp\{(1/2-\varepsilon(n))\ln^2 n\}$ до $\exp\{(1/2+\varepsilon(n))\ln^2 n\}$ с вероятностью, стремящейся к 1. Как мы видим, это замечание гораздо информативнее предыдущего. Обзор дальнейших исследований в этом направлении дан в [3]. Зафиксируем множество $A\subseteq\mathbf{N}$. Подстановка σ называется A-подстановкой, если длины всех циклов σ принадлежат множеству A. Пусть T_n — совокупность всех A-подстановок из S_n и случайная подстановка τ_n равномерно распределена на T_n. Приведем одно новое утверждение. Если последовательность $\{|T_n|/n!\}$ RO-меняется на бесконечности с нижним показателем, большим -1, то случайная величина $\ln M(\tau_n)$ асимптотически нормальна со средним $\sum_{i=1}^{n}\chi\{i\in A\}(\ln i)/i$ и дисперсией $\sum_{i=1}^{n}\chi\{i\in A\}(\ln^2 i)/i$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. P. Erdős, P. Turán, "On some problems of a statistical group-theory. III", *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.*, **18**:3-4 (1967), 309–320.
2. E. Landau, *Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen*, v. 1, 2, B. G. Teubner, Leipzig–Berlin, 1909, x+564, ix+567–961 pp.
3. A. L. Yakymiv, "Distribution of the order in some classes of random mappings", *Proceedings of XVII-th international summer conference on probability and statistics* (*ISCPS*-2016) (Pomorie, Bulgaria, 2016), Institute of Mathematics and Informatics, Bulgarian Academy of Sciences, Sofia, 42–50, http://www.math.bas.bg/~statlab/ISCPS2016.