ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ
Том 61 И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЯ Выпуск 3
2016

ТЕЗИСЫ ДОКЛАДОВ, ПРЕДСТАВЛЕННЫХ НА МЕЖДУНАРОДНОЙ КОНФЕРЕНЦИИ ПО СТОХАСТИЧЕСКИМ МЕТОДАМ

С 27 мая по 3 июня 2016 года в пансионате «Моряк» недалеко от живописного места Абрау-Дюрсо (район Новороссийска) состоялась **Международная конференция по стохастическим методам**, ставшая продолжением Всероссийской школы-коллоквиума по стохастическим методам, проводившейся в разных местах Российской Федерации 20 раз. Организаторами нынешней конференции стали Математический институт им. В. А. Стеклова РАН (отдел теории вероятностей и математической статистики), Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова (кафедра теории вероятностей) и опорный ВУЗ г. Ростова-на-Дону — Донской государственный технический университет (кафедра высшей математики). Руководил работой конференции председатель всех ее комитетов академик РАН А. Н. Ширяев.

Комитеты конференции представляли следующие участники: **организационный комитет** — Павлов И. В (зам. председателя), Бурнаев Е. В., Житлухин М. В., Шамраева В. В. и Шатских С. Я.; **программный комитет** — Яськов П. А. (зам. председателя), Гликлих Ю. Е., Климентов С. Б., Ульянов В. В.; **издательский комитет** — Толозова Т. Б., Яровая Е. Б. Технические вопросы на конференции решались **локальным оргкомитетом** в составе: Павлов И. В. (председатель), Шамраева В. В. (зам. председателя), Углич С. И.

В конференции кроме ученых России приняли участие представители США и Узбекистана. Всего было сделано 11 пленарных 40-минутных докладов, 20 секционных докладов и 14 стендовых сообщений. Темы пленарных докладов: Ширяев А. Н. (Вероятность и случайность); Яськов П. А. (О необходимых и достаточных условиях в теореме Марченко–Пастура о спектральных распределениях случайных матриц); Лыков А. А. (совм. с Малышевым В. А. и Меликян М. В.) (Новые применения стохастических методов в физике); Яровая Е. Б. (Stochastic evolution of a particle system in a noncompact phase space: an approach focused on branching random walks); Ульянов В. В. (Об общем подходе, приводящем к оценкам точности приближений); Кудрявцев О. Е. (Новые подходы к вычислению цен экзотических опционов в моделях Леви); Житлухин М. В. (Оценки для максимумов гауссовских процессов); Белопольская Я. И. (Стохастические модели законов сохранения в физике и биологии); Гликлих Ю. Е. (Движение частицы в калибровочном поле на языке стохастической механики); Шатских С. Я. (совм. с Мелкумовой Л. Э.) (Геометрия условных квантилей многомерных вероятностных распределений); Павлов И. В. (Стохастический анализ на деформированных структурах: обзор результатов и основные направления исследования).

Успешной организации конференции способствовала финансовая помощь Российского фонда фундаментальных исследований (грант 16-01-20190 Г).

Следующую, 2-ю Международную конференцию по стохастическим методам намечено провести в конце мая 2017 года в том же месте.

А. Н. Ширяев, И. В. Павлов, Т. Б. Толозова, В. В. Шамраева

Ниже публикуются тезисы докладов и сообщений участников конференции.

А в е р б у х Ю. В. (Екатеринбург, Россия) **Приближенные решения стохастических игр с непрерывным временем.**[1)]

В докладе, основанном на работе [1], исследуется стохастическая управляемая система с непрерывным временем. Приближенно оптимальная стратегия в исходной задаче строится на основе решения задачи управления для моделирующей системы. Предполагается, что это решение известно. Динамика каждой из систем задается генератором типа Леви–Хинчина. При этом предполагается, что каждая система управляется двумя игроками, действующими с противоположными целями. Для простоты будем считать, что цель первого (второго) игрока состоит в минимизации (максимизации) величины $\mathbf{E}\, g(X(T))$.

Вводится понятие u-стабильной функции для моделирующей системы. Основной результат работы следующий: если c_+ – u-стабильная функция для моделирующей системы, то верхняя функция цены в исходной игре $\mathrm{Val}_+(s,y)$ не превосходит $c_+(s,y) + R\cdot C\sqrt{\varkappa + M_0^1 + M_0^2}$. Здесь R – константа Липщица для функции платы g, C определяется константами Липшица для функций динамики, $\varkappa$ задает «расстояние» между исходной и моделирующей системами, величины M_0^i, $i=1,2$, описывают степень «стохастичности» исходной и моделирующей систем. На основе этого утверждения может строится почти оптимальное управление в системе большого числа частиц с конечным числом состояний аппроксимирующее оптимальное управление в предельной детерминированной системе. Независимо этот результат получен в [2].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Averboukh Yu.* Extremal shift rule for continuous-time zero-sum Markov games. arXiv:1412.0643.
2. *Averboukh Yu.* Extremal shift rule for continuous-time zero-sum Markov games. — Dynamic Games Appl. (в печати).

А й б а т о в С. Ж., А ф а н а с ь е в а Л. Г. (Москва, Россия) **Условия субэкспоненциальности стационарного времени ожидания в одноканальной системе обслуживания с регенерирующим входящим потоком.**

Рассматривается одноканальная система обслуживания с регенерирующим входящим потоком и произвольным временем обслуживания требования. Входящий поток $X(t)$ — суммарная работа, поступившая в систему за время $(0,t]$. Последовательность $\{\theta_n\}_{n=1}^{\infty}$ $(\theta_0=0)$ — точки регенерации $X(t)$. Обозначим $\tau_n=\theta_n-\theta_{n-1}$, $\gamma_n = X(\theta_n)-X(\theta_{n-1})$. Предполагается, что $\mathbb{E}\,\tau_n<\infty$ и $\mathbb{E}\,\gamma_n<\infty$. Пусть $G(y)=\mathrm{Prob}\,(\gamma_n\leqslant x)$, $\overline{G}(y)=1-G(y)$, $G^I(x)=(\mathbb{E}\,\gamma_n)^{-1}\int_0^x \overline{G}(y)\,dy$.

Введем процесс виртуального времени ожидания $W(t)$ и вложенные процессы $W_n=W(\theta_n-0)$, $w_n=W(t_n-0)$, где t_n — момент n-го скачка процесса $X(t)$. Считаем, что коэффициент загрузки системы $\rho=\mathbb{E}\,\gamma_n/\mathbb{E}\,\tau_n<1$, тогда у процессов $W(t)$, W_n, w_n существуют предельные стационарные распределения $\Psi(x)$, $\Phi(x)$, $F(x)$ соответственно.

Теорема 1. *Пусть $G^I(x)$ субэкспоненциальная функция распределения и $\mathrm{Prob}\,(\gamma_n>y+\tau_n)\sim\overline{G}(y)$ при $y\to\infty$, тогда при $x\to\infty$*

$$1-\Phi(x)\sim\frac{\rho}{1-\rho}G^I(x). \tag{1}$$

При некоторых дополнительных условиях асимптотика (1) верна для функций $\Psi(x)$ и $F(x)$. Мы применили теорему 1 к классической системе $\mathrm{Reg}/G/1/\infty$, в которой

[1)] Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 15-01-07909).

предполагается, что времена обслуживания — независимые одинаково распределенные случайные величины, не зависящие от входящего потока $A(t)$ ($A(t)$ — количество требований, поступивших в систему за время $(0, t]$).

Белопольская Я. И. (Санкт-Петербург, Россия) **Стохастические модели законов сохранения в физике и биологии.**[2)]

Настоящий доклад посвящен установлению связей между системами нелинейных параболических уравнений, возникающих в качестве математических моделей различных явлений в физике, химии, биологии и других областях, и теорией стохастических уравнений. В докладе обсуждается вероятностная интерпретация классических и обобщенных решений задачи Коши для систем нелинейных параболических уравнений двух типов: 1) с диагональным вхождением членов старшего порядка (и, в частности, для параболических возмущений гиперболических законов сохранения и баланса); 2) для систем с недиагональным вхождением членов старшего порядка (параболические системы с кросс-диффузией). Особое внимание при этом уделяется задаче построения вероятностных представлений обобщенных решений задачи Коши для систем обоих типов.

Общий подход к построению вероятностного представления (классического, обобщенного или вязкостного) решения задачи Коши для нелинейных параболических уравнений и систем можно разбить на три этапа. На первом этапе нужно построить вероятностное представление интересующего нас решения задачи Коши, предполагая, что такое решение существует, единственно и дважды дифференцируемо. На втором этапе нужно построить замкнутую систему стохастических соотношений, включающую вероятностное представление, полученное на первом этапе, и, предполагая, что решение этой стохастической системы, обладающее требуемыми свойствами, существует, нужно проверить,что в результате мы одновременно построили и искомое решение задачи Коши для исходной системы параболических уравнений. Наконец, на третьем этапе, отказавшись от каких-либо априорных предположений, нужно исследовать замкнутую стохастическую систему, полученную на втором этапе, доказать существование и единственность ее решения и проверить наличие у этого решения требуемых свойств.

Отметим, что такой подход оказался эффективным как при построении классических и обобщенных решений, так и при построении вязкостных решений для систем типа 1). Для этих систем реализованы все три описанных выше этапа построения классических [1], [2], обобщенных [3] и вязкостных [4] решений задачи Коши. Для систем типа 2) реализованы лишь первые два этапа описанного выше подхода к построению обобщенного решения задачи Коши (см. работы [5]–[7]). Вопрос о реализации этапа 3) остается открытым.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Белопольская Я. И.*, *Далецкий Ю. Л.* Исследование задачи Коши для систем квазилинейных уравнений помощью марковских процессов. — Изв. ВУЗов. Матем., 1978, т. 12, с. 6–17.
2. *Belopolskaya Ya.*, *Dalecky Yu.* Stochastic equations and differential geometry. Norwell, MA: Kluwer Academic Press, 1990.
3. *Belopolskaya Ya.*, *Woyczynski W.* Generalized solutions of the Cauchy problem for systems of nonlinear parabolic equations and diffusion processes. — Stoch. Dyn., 2012, v. 11, № 1, p. 1–31.
4. *Belopolskaya Ya.* Probabilistic counterparts of nonlinear parabolic PDE systems. — Modern Stoch. Appl., 2014, v. 90, p. 71–94.

[2)] Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 15-01-01453).

5. *Belopolskaya Ya.* Markov processes associated with fully nondiagonal systems of parabolic equations. — Markov Process. Relat. Fields, 2014, v. 20, № 3, p. 452–478.
6. *Belopolskaya Ya.* A stochastic model for the Lotka–Volterra system with cross-diffusion. — J. Math. Sci., 2016, v. 214, № 4, p. 425–442
7. *Белопольская Я. И.* Стохастическая интерпретация квазилинейных параболических систем с кросс-диффузией. — Теория вероятн. и ее примен., 2016, т. 61, № 2, с. 268–299.

Б у р н а е в Е. В. (Москва, Россия), А р т е м о в А. А. (Москва, Россия) **О выделении тренда из шума с длинной памятью и обнаружении разладок на его фоне.**[3)]

Рассматривается задача оценивания параметра $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \ldots, \theta_n)$ коэффициента сноса фрактального броуновского движения, который имеет вид $\sum_{i=1}^{n} \theta_i \varphi_i(t)$, где $\varphi_i(t), i = 1, \ldots, n$ — набор известных функций. Для $\boldsymbol{\theta}$ получена оценка максимального правдоподобия, а также байесовские оценки для нормального и равномерного априорных распределений (см. [1]). На основе полученных оценок разработан алгоритм выделения квазипериодического тренда и обнаружения разладок на его фоне. Задание момента поднятия «тревоги» в виде $\tau = \inf\{t \geqslant 0\colon a_t \geqslant h\}$, где $a_t = \psi(\boldsymbol{\lambda}; \mathbf{S}_t^1, \ldots, \mathbf{S}_t^d)$, $\boldsymbol{\lambda}$ — настраиваемые параметры функции агрегации $\psi(\cdot)$, $\mathbf{S}_t^k = \{s_s^k, 0 \leqslant s \leqslant t\}$, $k = 1, \ldots, d$ — траектории значений стандартных статистик $\{s_t^k\}_{k=1}^d$ для обнаружения разладок, позволило существенно увеличить точность обнаружения разладок (см. [2]). Применение разработанного алгоритма проиллюстрировано на примере решения задачи предсказательного технического обслуживания программно-нагруженных систем (см. [3]).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Артемов А. В.*, *Бурнаев Е. В.* Оптимальное оценивание сигнала, наблюдаемого во фрактальном гауссовском шуме. — Теория вероятн. и ее примен., 2016, т. 60, No. 1, с. 163–171.
2. *Artemov A. V.*, *Burnaev E. V.* Ensembles of detectors for online detection of transient changes. — Proc. SPIE, ICMV 2015, 2015, v. 9875, p. 1Z1–1Z5, DOI 10.1117/12.2228369.
3. *Artemov A. V.*, *Burnaev E. V.*, *Lokot A. S.* Nonparametric decomposition of quasi-periodic time series for change-point detection.rj Proc. SPIE, ICMV 2015, 2015, v. 9875, p. 201–205, DOI 10.1117/12.2228370.

Г л и к л и х Ю. Е. (Воронеж, Россия) **Об описании движения квантовой частицы в классическом калибровочном поле на языке стохастической механики.**[4)]

Доклад посвящен развитию некоторых результатов из [1]–[7]. Стохастическая механика Нельсона — это математическая теория, основанная на классической физике, но дающая те же предсказания, что и квантовая механика для широкого класса задач, в которых и та, и другая теории применимы. Можно считать, что стохастическая механика является особым способом квантования, отличным от гамильтонова и лагранжева (в терминах интегралов по траекториям) способов. Одной из главных отличительных черт стохастической механики является то, что в ней квантуется второй закон Ньютона, а не уравнения Гамильтона или Лагранжа. Стохастический аналог закона Ньютона известен как уравнение Ньютона–Нельсона.

[3)] Работа выполнена в ИППИ РАН при поддержке РНФ (проект 14-50-00150).

[4)] Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (грант № 14-21-00066) в Воронежском государственном университете.

Основной аппарат, используемый для описания уравнений Ньютона–Нельсона, это так называемые производные в среднем случайных процессов, введенные Нельсоном, а также квадратичная производная в среднем, введенная в [1] (см. также [2] и [3]). Отметим, что уравнения с производными в среднем сейчас используются также и в других физических, экономических и т.п. моделях.

К настоящему времени на языке стохастической механики исследовано большое число задач квантовой теории, как обычной, так и релятивистской (в релятивистском случае пришлось видоизменить определение производных в среднем, поскольку классические производные оказались нековариантными относительно преобразования Лоренца). Однако не было осуществлено описание движения квантовой частицы в калибровочном поле, по-видимому, из-за того, что ранее не было известно описание классической частицы в калибровочном поле в терминах второго закона Ньютона. Такое описание было предложено в [4] (см. также [2] и [3]), где было построено и изучено специальное уравнение второго порядка на расслоении со связностью, которое интерпретировалось как второй закон Ньютона, описывающий движение классической частицы в классическом калибровочном поле. На основе этого мы изучаем соответствующее уравнение Ньютона–Нельсона на расслоениях со связностями. Рассматриваются два случая: когда база расслоения — риманово многообразие и само расслоение (главное и векторное) вещественно, и когда база расслоения — пространство–время общей теории относительности и расслоение комплексно. Последний случай интерпретируется как описание движения квантовой релятивистской частицы в классическом калибровочном поле. Для частного случая группы симметрий $U(1)$ исследуется связь с квантовой электродинамикой. Предварительные варианты этих результатов опубликованы в [5]–[7].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Azarina S. V.*, *Gliklikh Yu. E.* Differential inclusions with mean derivatives. — Dynamic Systems Appl., 2007, v. 16, № 1, p. 49–72.
2. *Гликлих Ю. Е.* Глобальный и стохастический анализ в задачах математической физики. М.: Комкнига, 2005, 416 с.
3. *Gliklikh Yu. E.* Global and Stochastic Analysis with Applications to Mathematical Physics. London: Springer-Verlag, 2011, 460 p.
4. *Gliklikh Yu. E.*, *Ratiner P. S.* On a certain type of second order differential equations on total spaces of fiber bundles with connections. — Nonlinear Analysis in Geometry and Topology, Palm Harbor, Fl.: Hadronic Press, 2000, p. 99–106.
5. *Gliklikh Yu. E.*, *Vinokurova N. V.* On the description of motion of a quantum particle in the classical gauge field in the language of stochastic mechanics. — Commun. Stat., Theory Methods, 2011, v. 40, № 19–20, p. 3630–3640.
6. *Gliklikh Yu. E.*, *Vinokurova N. V.* On the Newton–Nelson type equations on vector bundles with connections. — Rend. Semin. Mat., Univ. Politec. Torino, 2013, v. 71, № 2, p. 219–226.
7. *Гликлих Ю. Е.* Об уравнении Ньютона–Нельсона на расслоениях со связностями. — Фундам. прикл. матем., 2015, № 3, с. 61–81.

Горбань С. Д. (Москва, Россия) **Задача последовательной проверки гипотез на конечном временном интервале для фрактального броуновского движения.**

Пусть наблюдаемый процесс $(X_t)_{t\geq 0}$ таков, что $X_t = \theta\mu t + \sigma B_t^H$, где $(B_t^H)_{t\geq 0}$ — фрактальное броуновское движение с показателем Хёрста H, $\mu \neq 0$, $\sigma^2 > 0$, а θ — случайная величина, независимая от B^H и принимающая два значения: $\mathbf{P}(\theta = 1) = \pi$, $\mathbf{P}(\theta = 0) = (1 - \pi)$. Задача последовательной проверки гипотез заключается в том, чтобы найти оптимальное решающее правило (τ, d), где $0 \leqslant \tau \leqslant T$ — момент остановки относительно естественной фильтрации процесса X, а d — $\mathscr{F}_\tau^X$-измеримая случайная величина, принимающая значения 0 и 1:

$$(\tau^*, d^*) = \arg\min_{(\tau,d)} \mathbf{E}_\pi \left[\tau + aI(d=0,\ \theta=1) + bI(d=1,\ \theta=0)\right].$$

С помощью интегрального преобразования, предложенного А. А. Муравлёвым в [2], и замены времени удаётся свести задачу для фрактального броуновского движения к соответствующей задаче для винеровского процесса с нелинейным штрафом за наблюдение. Показано, что последовательная проверка гипотез сводится к задаче об оптимальной остановке и связанной с ней задаче со свободной границей. Аналогично [1], установлено, что множество продолжения наблюдения «резко» уменьшается в терминальный момент времени.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Горбань С. Д.* Асимптотические свойства решения задачи последовательной проверки гипотез на конечном временном интервале. — Успехи матем. наук, 2015, т. 70, №4, с. 205–206.
2. *Муравлёв А. А.* Методы последовательного различения гипотез о значении сноса фрактального броуновского движения. — Успехи матем. наук, 2013, т. 68, №3, с. 193–194.

Г р е ч к о А. С., К у д р я в ц е в О. Е. (Ростов-на-Дону, Россия) **Особенности построения индекса волатильности российского срочного рынка, учитывающего возможные скачки цен.**[5)]

В последнее время волатильность российского валютного и фондового рынков существенно выросла, в итоге увеличилась потребность в хеджировании рисков с помощью инструментов срочного рынка Московской биржи. Возникла потребность в российском индексе волатильности RVI, аналоге американского индекса VIX.

Проведенный авторами анализ [1] показывает, что существующие индексы, основанные на формуле волатильности свободной от модели плохо оценивают реализованную волатильность в случае российского рынка.

Данная методика работает для диффузионных процессов и процессов с редкими скачками, но наиболее подходят процессы Леви с неограниченной вариацией, например, известная модель CGMY. Авторами получена формула волатильности свободной от модели для процессов Леви, которая апробирована на реальных данных российского срочного рынка. Таким образом, мы получили новую методику расчета индекса волатильности, учитывающую скачки в динамике индекса РТС.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Гречко А. С.*, *Кудрявцев О. Е.* Исследование волатильности российского срочного рынка. — Обозрение прикл. промышл. матем., 2015, т. 22, в. 5.
2. *Carr P.*, *Lee R.*, *Wu L.* Variance swaps on time-changed Lévy processes. — Finance Stoch., 2012, v. 16, №2, p. 335–355.

Г р и б к о в а Н. В. (Санкт-Петербург, Россия) **Вероятности больших и умеренных уклонений усеченных L-статистик.**

Пусть $X_1, X_2, \ldots$ — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин, $X_i \in \mathbf{R}$, с функцией распределения F, $X_{1:n} \leqslant \cdots \leqslant X_{n:n}$ — порядковые статистики, соответствующие первым n наблюдениям, $F^{-1}(u) = \inf\{x\colon F(x) \geqslant$

[5)] Исследование выполнено при поддержке РГНФ (грант №15-32-01390).

$u\}$, $0 < u < 1$, F_n и F_n^{-1} — эмпирическая функция распределения и ее инверсия соответственно. Рассмотрим (слабо) усеченное среднее

$$T_n = \frac{1}{n}\sum_{i=k_n+1}^{n-m_n} X_{i:n} = \int_{\alpha_n}^{1-\beta_n} F_n^{-1}(u)\,du,$$

положим

$$\mu_n = \int_{\alpha_n}^{1-\beta_n} F^{-1}(u)\,du,$$

где k_n, m_n — целые, $0 \leqslant k_n < n - m_n \leqslant n$, $k_n \wedge m_n \to \infty$, $n \to \infty$, $\alpha_n = k_n/n$, $\beta_n = m_n/n$. Положим $\xi_\nu = F^{-1}(\nu)$, $0 < \nu < 1$, введем уинсоризованные случайные величины $W_i^{(n)} = \xi_{\alpha_n} \vee (X_i \wedge \xi_{1-\beta_n})$. Обозначим $\sigma_{W,n} = (\mathbf{D}(W_i^{(n)}))^{1/2}$ и будем предполагать что $\liminf \sigma_{W,n} > 0$.

Одним из основных результатов работы является следующая теорема об умеренных уклонениях для слабо усеченных сумм.

Теорема. *Предположим, что* $\mathbf{E}\,|X_1|^p < \infty$ *для некоторого* $p > c^2 + 2$ $(c > 0)$, *предположим также, что* $\ln n/(k_n \wedge m_n) \to 0$ *и что* $\alpha_n \vee \beta_n = o((\ln n)^{-2p/(p-2)})$. *Тогда*

$$\mathbf{P}\left(\frac{\sqrt{n}(T_n - \mu_n)}{\sigma_{W,n}} > x\right) = [1 - \Phi(x)](1 + o(1)),$$

$$\mathbf{P}\left(\frac{\sqrt{n}(T_n - \mu_n)}{\sigma_{W,n}} < -x\right) = \Phi(-x)(1 + o(1))$$

равномерно по x *в диапазоне* $-A \leqslant x \leqslant c\sqrt{\ln n}$ $(A > 0)$.

Доказательство результатов основано на подходе, предложенном в [1].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Gribkova N. V.* Cramér type large deviations for trimmed L-statistics. — Probab. Math. Statist., http://arxiv.org/abs/1507.02403.

Г у с а к Ю. В. (Москва, Россия) **Устойчивость решения задачи оптимизации в одной модели страхования.**

Рассматривается модель функционирования страховой компании в дискретном времени. Предполагается, что ежегодно поступающие требования образуют последовательность независимых одинаково распределенных неотрицательных случайных величин $\{X_n\}_{n\geqslant 1}$ таких, что $X_n \sim \mathrm{law}\,(X)$, $n \geqslant 1$. Для обеспечения бесперебойной работы компании производятся дополнительные вливания капитала и применяется перестрахование эксцедента убыточности. Согласно договору перестрахования, уровень собственного удержания на текущий год определяется в начале года. Дополнительные вливания производятся в конце года в случае падения капитала компании ниже фиксированного уровня a. Находятся параметры перестрахования, минимизирующие ожидаемые совокупные вливания за n лет при условии, что премии страхования и перестрахования рассчитывались по принципу среднего с нагрузкой безопасности (см. [1]). Оценивается устойчивость минимальных ожидаемых вливаний и оптимальных параметров модели к изменению в распределении страховых требований. А именно, если иски $\{X_n\}_{n\geqslant 1}$ имеют распределение $\mathrm{law}(Y)$, отличное от $\mathrm{law}\,(X)$, то в предположении, что величины X и Y близки в метрике Канторовича, выводится оценка для $\sup_{u\geqslant a}|h_{n_X}(u) - h_{n_Y}(u)|$, где u — начальный капитал компании, $h_{n_X}(u)$ и $h_{n_Y}(u)$ — минимальные вливания при $X_n \sim \mathrm{law}\,(X)$ и $X_n \sim \mathrm{law}\,(Y)$ соответственно. В силу того, что на практике распределение исков обычно неизвестно, изучается устойчивость решения и ключевых характеристик модели при замене теоретического распределения на эмпирическое.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Bulinskaya E. V*, *Gusak J. V.*, *Muromskaya A. A.* Discrete-time insurance model with capital injections and reinsurance. — Methodol. Comput. Appl. Probab., 2015, v. 17, № 4, p. 899–914.

Житлухин М. В. (Москва, Россия), Боровков К. А., Мишура Ю. С., Новиков А. А. **О максимумах гауссовских процессов и их аппроксимациях.**[6)]

Доклад посвящен оценкам для математического ожидания максимумов гауссовских процессов и их аппроксимаций процессами с дискретным временем. А именно, рассматриваются гауссовские процессы X_t с нулевым средним, которые удовлетворяют неравенствам

$$C_1|t-s|^{H_1} \leqslant (\mathbf{E}\,(X_t - X_s)^2)^{1/2} \leqslant C_2|t-s|^{H_2} \qquad \text{для всех } t, s \geqslant 0 \qquad (*)$$

с некоторыми константами $C_1, C_2 > 0$ и $H_1, H_2 \in (0,1)$. Фундаментальным примером процесса такого типа является фрактальное броуновское движение B_t^H — гауссовский процесс с параметром $H \in (0,1)$, обладающий ковариационной функцией

$$\mathbf{E}\,(B_t^H B_s^H) = \frac{1}{2}\,(t^{2H} + s^{2H} - |t-s|^{2H}).$$

В приложениях важным вопросом является нахождение (или оценка) математических ожиданий максимумов гауссовских процессов, $\mathbf{E}\max_{t\leqslant 1} X_t$; в частности, она позволяет исследовать асимптотику функции распределения максимума. Однако в общем случае для процессов со структурой $(*)$ найти точное значение математического ожидания максимума не представляется возможным. Ввиду этого, в работе были установлены некоторые оценки для данной величины, а также, имея ввиду численные приближения, были установлены оценки для погрешности дискретной аппроксимации с помощью величины $\mathbf{E}\max_{0\leqslant i\leqslant n} X_{i/n}$.

Основные результаты работы состоят в доказательстве слудующих неравенств.

1. Для процесса X_t, удовлетворяющего $(*)$, выполнено

$$\frac{C_1L_1}{\sqrt{H_1}} \leqslant \mathbf{E}\max_{0\leqslant t\leqslant 1} X_t \leqslant \frac{C_2L_2}{\sqrt{H_2}},$$

где можно взять $L_1 = 1/(4\pi e\ln 2)$ и $L_2 = (15/4)\sqrt{(2\pi/\ln^3 2)}$.

2. Если X_t удовлетворяет правой части неравенства $(*)$, то для любого $n \geqslant 2^{1/H_2}$

$$\mathbf{E}\max_{0\leqslant t\leqslant 1} X_t - \mathbf{E}\max_{0\leqslant i\leqslant n} X_{i/n} \leqslant \frac{2C_2\sqrt{\ln n}}{n^{H_2}}\left(1 + \frac{4}{n^{H_2}} + \frac{0.0074}{(\ln n)^{3/2}}\right) \leqslant \frac{7C_2\sqrt{\ln n}}{n^{H_2}}.$$

3. Для фрактального броуновского движения B_t^H и любых $0 < H_1 < H_2 < 1$ верна оценка

$$\mathbf{E}\max_{0\leqslant i\leqslant n} B_{i/n}^{H_1} - \mathbf{E}\max_{0\leqslant i\leqslant n} B_{i/n}^{H_2} \leqslant \sqrt{\frac{H_2 - H_1}{eH_1}\,\ln n}.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Borovkov K.*, *Mishura Y.*, *Novikov A.*, *Zhitlukhin M.* Bounds for expected maxima of Gaussian processes and their discrete approximations. — Stochastics, published online 2015.

[6)] Работа выполнена при поддержке РНФ (проект № 14-21-00162).

З а д о р о ж н и й В. Г. (Воронеж, Россия) **О стабилизации линейных систем гауссовым случайным шумом.**

Рассмотрим линейную систему дифференциальных уравнений $dx/dt = \varepsilon(t,\omega)Ax + f(t,\omega)$, где $x \in \mathbf{R}^n$, ε — скалярный случайный гауссовский процесс с математическим ожиданием $\mathbf{M}\varepsilon$ и ковариационной функцией $b(s_1, s_2) = \mathbf{M}(\varepsilon(s_1)\varepsilon(s_2)) - \mathbf{M}(\varepsilon(s_1))\mathbf{M}(\varepsilon(s_2))$, ω — случайное событие, $f(t,\omega)$ — случайный векторный процесс.

Решение системы $x(t, x_0)$ с начальным условием $x(t_0, x_0) = x_0$ называется (ср. [1]) устойчивым в среднем, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta(\varepsilon) > 0$, что для любого ξ, удовлетворяющего условию $\|\mathbf{M}\xi - \mathbf{M}x_0\| < \delta(\varepsilon)$, выполняется условие $\sup_{t \geq t_0} \|\mathbf{M}(x(t,\xi)) - \mathbf{M}(x(t,x_0))\| < \varepsilon$. Если при этом $\|\mathbf{M}(x(t,\xi)) - \mathbf{M}(x(t,x_0))\| \to 0$ при $t \to +\infty$, то решение называется асимптотически устойчивым в среднем.

Рассматриваемая линейная система является устойчивой, асимптотически устойчивой, неустойчивой в среднем [1] тогда и только тогда, когда

$$\left\| \exp\left(A \int_{t_0}^{t} \mathbf{M}(\varepsilon(s))\, ds + \frac{A^2}{2} \int_{t_0}^{t} \int_{t_0}^{t} b(s_1, s_2)\, ds_1\, ds_2 \right) \right\|$$

соответственно ограничено при $t \in [t_0, \infty)$, стремится к нулю при $t \to +\infty$, неограничено при $t \in [t_0, \infty)$.

Отсюда получаются условия, при которых рассматриваемая система становится асимптотически устойчивой, хотя система $dx/dt = Ax$ неустойчива.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Хасьминский Р. З.* Устойчивость систем дифференциальных уравнений при случайных возмущениях их параметров. М.: Наука, 1969, 368 с.

К л и м е н т о в С. Б. (Ростов-на-Дону, Россия) **Некоторые «патологические» решения уравнения Бельтрами.**[7)]

В работе построен пример ограниченного в единичном круге D решения равномерно эллиптического уравнения Бельтрами, почти всюду на $\Gamma = \partial D$ не имеющего некасательных предельных значений, а также пример ограниченного в D решения такого уравнения, не равного тождественно нулю, почти всюду на Γ имеющего нулевые некасательные предельные значения. Эти примеры показывают, что в общем случае для классов Харди решений уравнения Бельтрами (и более общих неканонических эллиптических систем первого порядка) обычная постановка краевых задач, используемая для голоморфных и обобщённых аналитических функций, некорректна, а также дают возможность построения примеров случайных (не диффузионных) процессов в D, с вероятностью единица выходящих в множество нулевой линейной меры на Γ.

К у д р я в ц е в О. Е. (Ростов-на-Дону, Россия) **Новые подходы к вычислению цен экзотических опционов в моделях Леви.**[8)]

Вычисление цен экзотических опционов (барьерных, lookback и др.), включая оценку риска ликвидности или выхода цены базового актива за фиксированный уровень, опирается на поведение процессов супремума (инфимума) цены, характеристические функции которых в случае общих моделей Леви не имеют удобных для численной реализации формул. Пусть X_t — процесс Леви. Рассмотрим преобразование Лапласа–Карсона характеристических функций процессов супремума $\overline{X}_t =$

[7)] Работа выполнена в рамках научных планов Южного федерального университета и Владикавказского научного центра РАН.

[8)] Исследование выполнено при поддержке РГНФ (грант № 15-32-01390).

$\sup_{0\leqslant s\leqslant t} X_s$ и инфимума $\underline{X}_t = \inf_{0\leqslant s\leqslant t} X_s$: $\phi_q^+(\xi) = \mathbf{E}\,[e^{i\xi\overline{X}_T}]$ и $\phi_q^-(\xi) = \mathbf{E}\,[e^{i\xi\underline{X}_T}]$, где $T \sim \operatorname{Exp} q$. Для широкого класса процессов Леви доказана следующая теорема [1].

Теорема 1. *Существуют константы $\omega_- < 0$ и $\omega_+ > 0$ такие, что*

(a) *$\phi_q^+(\xi)$ допускает аналитическое продолжение для $\operatorname{Im}\xi > \omega_-$ и может быть представлена в виде $\phi_q^+(\xi) = \exp[i\xi F^+(0) - \xi^2 \widehat{F}^+(\xi)]$, где*

$$F^+(x) = I_{(-\infty,0]}(x)(2\pi)^{-1} \int_{-\infty+i\omega_-}^{+\infty+i\omega_-} e^{ix\eta} \frac{\ln(q+\psi(\eta))}{\eta^2}\, d\eta; \tag{1}$$

$$\widehat{F}^+(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ix\xi} F^+(x)\, dx. \tag{2}$$

(b) *$\phi_q^-(\xi)$ допускает аналитическое продолжение в полуплоскость $\operatorname{Im}\xi < \omega_+$ и может быть представлена в виде $\phi_q^-(\xi) = \exp[-i\xi F^-(0) - \xi^2 \widehat{F}^-(\xi)]$, где*

$$F^-(x) = \mathbf{o}_{[0,+\infty)}(x)(2\pi)^{-1} \int_{-\infty+i\omega_+}^{+\infty+i\omega_+} e^{ix\eta}\, \frac{\ln(q+\psi(\eta))}{\eta^2}\, d\eta, \tag{3}$$

$$\widehat{F}^-(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ix\xi}\, F^-(x)\, dx. \tag{4}$$

Формулы (1)–(4) могут быть эффективно численно реализованы с помощью быстрого преобразования Фурье.

Применяя алгоритм Гавера–Стехфеста к функции $\phi_q^+(\xi)$, мы получаем характеристическую функцию случайной величины $\overline{X}_T$. Функцию распределения величины $\overline{X}_T$ можно выразить через интеграл Фурье, значения которого вычисляются с помощью быстрого преобраазования Фурье. Обратные значения функции распределения можно получить с помощью линейной интерполяции и использовать для построения методов Монте-Карло, позволяющих моделировать совместное распределение максимума и значения процесса Леви в фиксированный момент времени с помощью факторизации Винера–Хопфа. Аналогичный результат может быть получен для процессов инфимума.

С другой стороны, формулы (1)–(4) могут быть использованы при решении задач вычисления безарбитражных цен экзотических опционов методом Винера–Хопфа (см. [2]) для более точной аппроксимации факторов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Kudryavtsev O.* Advantages of the Laplace transform approach in pricing first touch digital options in Lévy-driven models. — J Boletin de la Sociedad Matematica Mexicana, 2016, http://dx.doi.org/10.1007/s40590-016-0104-z
2. *Kudryavtsev O. Ye.* An efficient numerical method to solve a special cass of integro-differential equations relating to the Lévy models. — Math. Models Computer Simul., 2011, v. 3, №6, p. 706–711.

Л и с о в с к и й Д. И. (Москва, Россия), Ж и т л у х и н М. В. (Москва, Россия) **Задача о разладке для броуновского моста.**

В работе рассматривается задача скорейшего обнаружения изменения сноса для процесса броуновского моста в байесовской постановке. Пусть наблюдению подлежит случайный процесс $X = (X_t)_{0\leqslant t\leqslant 1}$, задаваемый СДУ

$$dX_t^\theta = \frac{\mu I_{\{t\geqslant\theta\}} - X_t^\theta}{1-t}\, dt + dB_t,$$

где $\mu > 0$ — известный числовой параметр, $B = (B_t)_{0\leqslant t\leqslant 1}$ — стандартное броуновское движение, θ — равномерно распределенная на отрезке $[0,1]$ случайная величина (ненаблюдаемый напрямую момент разладки). Рассматривается следующая функция риска: $\inf_{\tau\in\mathfrak{M}} \mathbf{E}^{\theta}(I_{\{\tau<\theta\}} + c(\tau-\theta)^{+})$, где константа $c > 0$ (плата за наблюдения), а $\mathfrak{M}$ — класс моментов остановки относительно фильтрации $(\mathscr{F}_t^{X^\theta})_{0\leqslant t\leqslant 1}$. Усреднение здесь производится по специальным образом построенной мере Prob^{θ} (см. [1]). Доказывается, что сформулированная задача о разладке эквивалента задаче об оптимальной остановке $\inf_{\tau\in\mathfrak{M}} \mathbf{E}^{1}(1-\tau+c\int_0^{\tau}\psi_s\,ds)$, где процесс ψ_s — статистика Ширяева–Робертса, более точно: $d\psi_t = dt + \psi_t(\mu/(1-t))\,dB_t$, $\psi_0 = 0$ для любого $t \in [0,1)$. Инфимумы в этих задачах достигаются на одном и том же моменте остановки. Для решения задачи оптимальной остановки применяются техники, описанные в книге [2], в частности, используются как численные методы, так и методы Монте-Карло.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Житлухин М. В.*, *Ширяев А. Н.* Байесовские задачи о разладке на фильтрованных вероятностных пространствах. — Теория вероятн. и ее примен., 2012, т. 57, в. 3, с. 453–470.
2. *Peskir G.*, *Shiryaev A.* Optimal stopping and free-boundary problems. Basel: Birkhäuser, 2006, 514 p.

Л ы к о в А. А., М а л ы ш е в В. А., М е л и к я н М. В. (Москва, Россия) **Новые применения стохастических методов в физике.**

Вторая половина прошлого века характеризовалась фантастическим развитием вероятностных методов в равновесной статистической физике. В докладе говорится о новых строгих математических результатах в неравновесной статистической физике.

1. Рассматривается гамильтонова система N частиц с квадратичным взаимодействием, определяемым положительно определенной матрицей V. Это самая плохая система в смысле сходимости к равновесию ввиду существования инвариантных торов. Тем не менее доказывается [2], что если хотя бы на одну из частиц действует внешняя случайная стационарная сила $f(t)$ с диссипацией, то для почти всех V имеет место следующая теорема сходимости: для любых начальных условий имеет место сходимость к единственной инвариантной мере μ. При этом μ будет мерой Гиббса для данной системы N частиц, только если стационарный процесс $f(t)$ не имеет памяти, то есть является белым шумом. Температура при этом зависит от дисперсии белого шума и параметра диссипации. Естественная гипотеза состоит в том, что для систем с более сложным взаимодействием будет то же самое, так как распространенное представление состоит в том, что нелинейные гамильтоновы системы имеют (в общем положении) лучшее перемешивание, чем линейные.

2. Рассматривается такая же гамильтонова система, но случайное воздействие на одну выделенную частицу носит совершенно другой характер. А именно, в случайные моменты времени совершается замена знака скорости выделенной частицы, т.е. сохраняющее энергию преобразование. В работе [1] доказывается, что для любых начальных состояний имеет место сходимость к мере Лиувилля на соответствующей энергетической поверхности.

3. Задача о разрыве изменяющейся во времени цепочки молекул, у которой левая крайняя частица закреплена, а на правую действует постоянная растягивающая внешняя сила. В [3] использована процедура, называемая в физике double scaling limit, чтобы найти точную картину (в пространстве параметров) фазового перехода.

4. Транспортные потоки большого числа частиц. В работах [4] и [5] рассматривается поток частиц на прямой с лидером, где лидер движется как угодно, а движение любой другой частицы зависит только от ее расстояния до предыдущей частицы. Эта система уже не будет гамильтоновой. Рассматривается задача оптимального управления устойчивостью — исключения столкновений частиц и увеличения плотности потока. Получена фазовая диаграмма с областями устойчивости, неустойчивости и частичной устойчивости.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Lykov A. A., Malyshev V. A.* Liouville ergodicity of linear multi-particle Hamiltonian system with one marked particle velocity flips. — Markov Process. Related Fields, 2015, v. 21, № 2, p. 381–412.
2. *Lykov A. A., Malyshev V. A.* Convergence to Gibbs equilibrium — unveiling the mystery. — Markov Process. Related Fields, v. 19, № 4, p. 643–666.
3. *Малышев В. А., Музычка С. А.* Динамический фазовый переход в простейшей модели цепочки молекул. — Теорет. матем. физ., т. 179, № 1, с. 123–133.
4. *Lykov A. A., Malyshev V. A., Melikian M. V.* Stability and admissible densities in transportation flow models. «Communications in Computer and Information Science: Distributed Computer and Communication Networks». Berlin: Springer, 2015, v. 601, p. 289–295.
5. *Lykov A. A., Malyshev V. A., Melikian M. V.* Phase diagram for one-way traffic flow with local control. http://arxiv.org/abs/1512.08185.

М у р о м с к а я А. А. (Москва, Россия) **Модель работы акционерной страховой компании, использующей дивидендную стратегию со ступенчатой функцией барьера.**

Рассмотрим модель Спарре Андерсена, согласно которой капитал страховой компании, выплачивающей дивиденды, в момент t имеет вид $X(t) = x + ct - \sum_{i=1}^{N(t)} X_i - D(t)$, $t \geqslant 0$ (см. [1]). Здесь c — интенсивность поступления премий, $N(t)$ — процесс восстановления, $D(t)$ — совокупные дивиденды, выплаченные к моменту времени t. Случайные величины $\{X_i\}$, обозначающие размеры исков, независимы и одинаково распределены. Кроме этого, $\{X_i\}$ и процесс $N(t)$ также предполагаются независимыми. Дивиденды выплачиваются в соответствии с барьерной стратегией с уровнем барьера $b(t)$, таким, что $b(t) = b_i$ на полуинтервалах вида $t \in [T_{i-1}, T_i)$, $i \geqslant 1$, где T_i — это момент поступления i-го требования, $T_0 = 0$. В рамках данной модели получена оценка сверху для вероятности разорения компании (аналог неравенства Лундберга [2] для случая наличия дивидендных выплат). Приведен пример стратегии со ступенчатой функцией барьера, при которой оценка меньше 1. При дополнительном условии, что $N(t)$ является пуассоновским процессом, доказано также более сильное неравенство для вероятности разорения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Sparre Andersen E.* On the collective theory of risk in case of contagion between the claims. — Transactions of XVth International Congress of Actuaries, 1957, v. 2, № 6, p. 219–229.
2. *Калашников В. В., Константинидис Д. Г.* Вероятность разорения. — Фундам. и прикл. матем., 1996, т. 2, № 4, с. 1055–1100.

П а в л о в И. В. (Ростов-на-Дону, Россия) **Стохастический анализ на деформированных структурах: обзор результатов и основные направления исследования.**[9)]

Настоящий доклад сфокусирован на процессах с дискретным временем, определенных на структурах, более общих, чем классические стохастические базисы. Эти структуры были названы нами деформированными стохастическими базисами

[9)] Работа выполнена при поддержке РФФИ (гранты № № 16-01-00184, 16-07-00888, 16-01-20190).

1-го и 2-го рода (выбор такой терминологии подробно аргументирован в [1]). А именно, пусть $(\Omega, \mathbf{F})$ — фильтрованное пространство с дискретным временем, где Ω — произвольное множество и $\mathbf{F} = (\mathscr{F}_n)_{n=0}^{\infty}$ — возрастающая последовательность σ-алгебр. Семейство $\mathbf{Q} = (Q^{(n)}, \mathscr{F}_n)_{n=0}^{\infty}$ вероятностных мер $Q^{(n)}$, определенных на $\mathscr{F}_n$, называется D1 — деформацией 1-го рода (соответственно D2 — деформацией 2-го рода), если $Q^{(n+1)} \,|\, \mathscr{F}_n \ll Q^{(n)}$ (соответственно $Q^{(n+1)} \,|\, \mathscr{F}_n \gg Q^{(n)}$) для любого $n \in \mathbf{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$.

Фундаментальная роль классических мартингалов в различных областях математики (в частности, в финансовой математике) хорошо известна. Используя деформации, мы вводим понятия деформированных мартингалов 1-го и 2-го рода. Пусть для любого $n \in \mathbf{N}$ — случайные величины Z_n принадлежит $L_1(\Omega, \mathscr{F}_n, Q^n)$, а $\mathbf{Q}$ есть D1 (соответственно D2). Процесс $\mathbf{Z} = (Z_n, \mathscr{F}_n, Q^n)_{n=0}^{\infty}$ называется DM1 — деформированным мартингалом 1-го (соответственно DM2 — 2-го) рода, если для любого $n \in \mathbf{N}$ $Q^{(n+1)}$-п.н. (соответственно $Q^{(n)}$ -п.н.) $Z_n = E^{Q^{(n+1)}}[Z_{n+1} \,|\, \mathscr{F}_n]$. Аналогично определяются деформированные супермартингалы и субмартингалы (DSupM1, DSupM2, DSubM1, DSubM2), деформированные локальные мартингалы (DLM1, DLM2) и деформированные потенциалы (DP1, DP2).

В докладе анализируется и дополняется ряд результатов, опубликованных автором в последние 3 года (в соавторстве с О. В. Назарько): 1) разложение Дуба для DSubM1; 2) разложение Крикеберга для DM2 и разложение Рисса для DSupM2; 3) теорема Дуба о преобразовании свободного выбора для DSubM1 and DSubM2; 4) характеризация DLM1 в терминах деформированных мартингальных преобразований и деформированных обобщенных мартингалов; 5) сведение деформаций 1-го рода к слабым деформациям; 6) приложения к финансовой математике; 7) понятия деформированных стохастических базисов и деформированных мартингалов в непрерывном времени. Формулировки и доказательства всех этих результатов можно найти в [2]–[7].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Павлов И. В.*, *Назарько О. В.* Реккурентный метод построения слабых деформаций по процессу плотностей в рамках модели стохастического базиса, снабженного специальной хааровской фильтрацией. — Вестник РГУПС, 2012, т. 45, № 1, с. 200–208.
2. *Павлов И. В.*, *Назарько О. В.* Теоремы о разложении деформированных мартингалов и их возможное применение в интеллектуальном моделировании. — Вестник РГУПС, 2013, т. 46, № 4, с. 142–147.
3. *Павлов И. В.*, *Назарько О. В.* Теоремы о деформированных мартингалах: разложение Рисса, характеризация локальных мартингалов, вычисление квадратичных характеристик. — Изв. ВУЗов Сев.-Кавк. рег. Естеств. науки, 2015, т. 1, с. 36–42.
4. *Павлов И. В.*, *Назарько О. В.* Обобщение теоремы Дуба о свободном выборе для деформированных субмартингалов. — Успехи матем. наук, 2013, т. 68, в. 6, с. 175–176.
5. *Павлов И. В.*, *Назарько О. В.* Теорема о преобразовании свободного выбора для деформированных субмартингалов. — Теория вероятн. и ее примен., 2014, т. 59, в. 3, с. 585–594.
6. *Павлов И. В.*, *Назарько О. В.* О неотрицательных адаптированных последовательностях случайных величин, являющихся процессам плотностей для деформированных стохастических базисов 1-го рода. — Успехи матем. наук, 2015, т. 7, в. 1, с. 185–186.
7. *Павлов И. В.*, *Назарько О. В.* Характеризация процессов плотностей деформированных стохастических базисов первого рода. — Труды Матем. ин-та им. Стеклова, 2014, т. 287, с. 267–278.

Пресман Э. Л., Аркин В. И., Сластников А. Д. (Москва, Россия) **О структуре множества продолжения в задаче оптимальной остановки общей одномерной диффузии.**[10)]

Рассматривается регулярная диффузия X_t $(t \geqslant 0)$, $X_0 = x$ со значениями в интервале I. Если меры скорости и убивания имеют плотности, а шкала дважды дифференцируема, получается диффузия Ито. В [1] было предложено рассматривать необходимые и достаточные условия того, что множество продолжения $C{=}\{x\colon g(x){<}V(x)\}$, где $V(x){=}\sup_\tau \mathbf{E}_x g(X_\tau)$, имеет ту или иную структуру. Для множества продолжения вида $C{=}\{x \in I\colon x{<}p\}$ такие условия при дополнительных предположениях на функцию выплат и наличии дисконтирования были получены в [1] для диффузии Ито, в [2] (условия другого типа) для общей диффузии без убивания, и сформулированы в [3] без дополнительных предположений на диффузию и функцию выплат.

В работе получены необходимые и достаточные условия островного характера множества продолжения: $C{=}\{x \in I\colon q{<}x{<}p\}$. Доказательство основано на характеризации эксцессивных функций и методе модификации функции выплат (см. [4]).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Аркин В. И.* Пороговые стратегии в задачах оптимальной остановки одномерных диффузионных процессов. — Теория вероятн. и ее примен., 2014, т. 59, в. 2, с. 365–374.
2. *Crocce F.*, *Mordecki E.* Explicit solutions in one-sided optimal stopping problems for one-dimensional diffusions. — Stochastics, 2014, v. 86, № 3, p. 491–509.
3. *Пресман Э. Л.*, *Сластников А. Д.* Пороговые стратегии в задачах оптимальной остановки. — Обозрение прикл. и промышл. матем., 2014, т. 21, в. 5, с. .
4. *Presman E.* Solution of the optimal stopping problem for one-dimensional diffusion based on a modification of the payoff function. — Prokhorov and Contemporary Probability Theory. Berlin: Springer, 2013, p. 371–403.

Родоченко В. В., Кудрявцев О. Е. (Ростов-на-Дону, Россия) **О применении факторизации Винера–Хопфа к вычислению рисков пересечения ценовых барьеров в модели Хестона.**[11)]

Для иллюстрации метода управления рисками портфеля ценных бумаг, основанного на анализе и хеджировании рисков выхода цены за фиксированный барьер, рассмотрим в рамках модели Хестона барьерный опцион put с барьером снизу. Применяя процедуру рандомизации Карра и подходящую замену [1] для устранения корреляции между процессами цены и вариации, мы получаем возможность свести вычисление безарбитражной цены контракта к рекуррентному решению семейства задач со стохастической вариацией.

Аналогично [1], мы используем аппроксимацию процесса вариации CIR при помощи марковской цепи, после чего строим приближение искомого функционала в виде семейства задач с фиксированной вариацией, каждая из которых может быть решена при помощи факторизации Винера–Хопфа [2]. Возможно обобщение метода на случай моделей, допускающих скачки.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Briani M.*, *Caramellino L.*, *Zanette A.* A hybrid approach for the implementation of the Heston model. — IMA J. Management Math., 2015; ArXiv:1603.07225

[10)] Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 15-06-03723).
[11)] Работа выполнена при финансовой поддержке РГНФ (проект № 15-32-01390).

2. *Kudryavtsev O.*, *Levendorskii S.* Fast and accurate pricing of barrier options under Lévy processes. — J. Finance and Stochastics, 2009, v. 13, № 4, p. 531–562.

С о н и н И. М., М о л ч а н о в С. А. (Шарлотт, США) **Условные ожидания и переливание из пустого в порожнее.**

Примерно десять лет назад А. Черный и П. Григорьев [1] получили следующий удивительный результат.

Теорема. *Пусть* $(\Omega, F, \mathbf{P})$ *— вероятностное пространство без атомов,* X, Y *— ограниченные функции с одним и тем же распределением. Тогда для любого* $\varepsilon > 0$ *существует последовательность* σ*-подалгебр* $F_1, F_2, \ldots, F_n \subseteq F$ *такая, что для последовательности функций* $X_0 = X$, $X_1 = \mathbf{E}(X_0 \,|\, F_1)$, $X_2 = \mathbf{E}(X_1 \,|\, F_2), \ldots, X_n = \mathbf{E}(X_{n-1} \,|\, F_n)$, *выполняется неравенство* $||X_n - Y|| \leq \varepsilon$.

Если σ-алгебра определена конечным или счетным разбиением, то условное математическое ожидание функции есть не что иное, как усреднение этой функции по отношению к более «грубому» разбиению. Разбиение отрезка $[0,1]$ на $2n$ равных интервалов эквивалентно следующей «гидростатической» задаче. Предположим что имеется $2n$ чашек, n левых наполнены водой, а n правых — пустые. Левые и правые чашки можно соединять так, что уровни жидкости в них выравниваются. Упомянутая теорема эквивалентна следующему утверждению: если n достаточно велико, то можно перелить почти всю воду слева направо. В нашей работе мы отвечаем на два вопроса, поднятые этой теоремой. Каков оптимальный способ переливания и сколько при этом останется при фиксированном n? Мы описываем все оптимальные переливания и доказываем, что первый член асимптотики в этой задаче имеет вид $2/\sqrt{n\pi}$. Другая интерпретация теоремы Черного и Григорьева, без ответов на два вопроса, дана в работе [2].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Cherny A. S.*, *Grigoriev P. G.* Dilatation monotone risk measures are law invariant. — Finance Stoch., 2007, vol. 2, p. 291–298.
2. *Gordon A.*, *Quinn J.* Iterated conditional expectations. — J. Math. Anal. Appl., 2010, v. 367, № 2, p. 699–704.

Ш а м р а е в а В. В. (Ростов-на-Дону, Россия) **О неравенствах, обеспечивающих выполнение интерполяционных свойств мартингальных мер.**[12)]

Среди мартингальных мер неполного рынка, которые порождают открытый интервал справедливых цен платежного обязательства, в случае счетного вероятностного пространства для большого числа (B,S)-рынков существуют интерполяционные мартингальные меры, порождающие «более справедливые» цены. В настоящем докладе для одношаговых (B,S)-рынков рассматриваются мартингальные меры, удовлетворяющие ослабленному условию несовпадения барицентров (ОУНБ; см. [1]) — условию, позволяюшему с помощью такой мартингальной меры интерполировать (относительно произвольной интерполирующей специальной хааровской фильтрации) неполный рынок до полного. Рассмотрим фильтрацию $(\Omega, \mathbf{F})$, где $\mathbf{F} = (\mathscr{F}_0, \mathscr{F}_1)$, $\mathscr{F}_0 = \{\Omega, \oslash\}$, а $\mathscr{F}_1$ порождена разбиением Ω на счетное число атомов B_i, $i \in \mathbf{N} = \{1, 2, \ldots\}$. Зададим процесс $Z = (Z_n, \mathscr{F}_n)_{n=0}^{1}$, рассматриваемый как дисконтированная стоимость акции, и обозначим $Z_0 = a$, $Z_1|_{B_i} = b_i$. Предположим, что $b_1 < b_2 < b_3 < b_4$, каждое из этих чисел может присутствовать в последовательности

12) Работа выполнена при поддержке РФФИ (проекты № № 16-01-00184, 16-07-00888, 16-01-20190).

$b_5, b_6, \ldots$ конечное или бесконечное число раз, а других чисел в этой последовательности нет. Пусть полученный таким образом рынок безарбитражен, причем $a \neq b_2$ и $a \neq b_3$. В докладе продемонстрирована новая методика доказательства существования интерполяционных мартингальных мер, позволяющая получать результаты, более общие, чем в [1]. Она основана на замене сложных неравенств из ОУНБ, содержащих различные неопределенные подмножества из $\mathbf{N}$, более простыми неравенствами, содержащими конкретные компоненты мартингальных мер.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Павлов И. В., Цветкова И. В., Шамраева В. В.* О существовании мартингальных мер, удовлетворяющих ослабленному условию несовпадения барицентров, в случае счетного вероятностного пространства. — Теория верятн. и ее примен., 2016, т. 61, в. 1, с. 173–181.

Шатских С. Я., Мелкумова Л. Э. (Самара, Россия) **Геометрия условных квантилей многомерных вероятностных распределений.**[13)]

Для n-мерного вероятностного распределения $F_{1\ldots n}(x_1, \ldots, x_n)$ рассмотрим определитель (см. [1])

$$\omega = \begin{vmatrix} dx_1 & \ldots & dx_{n-1} & dx_n \\ 1 & \ldots & \dot q_{n-1\,|\,1}^{(x_{n-1},x_1)}(x_1) & \dot q_{n\,|\,1}^{(x_n,x_1)}(x_1) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \dot q_{1\,|\,n-1}^{(x_1,x_{n-1})}(x_{n-1}) & \ldots & 1 & \dot q_{n\,|\,n-1}^{(x_n,x_{n-1})}(x_{n-1}) \end{vmatrix}, \tag{1}$$

построенный из производных одномерных условных квантилей $\dot q_{i|j}^{(x_i,x_j)}(x_j)$:

$$F_{i\,|\,j}\Big(q_{i\,|\,j}^{(x_i^0,x_j^0)}(x_j)\,|\,x_j\Big) = F_{i\,|\,j}(x_i^0\,|\,x_j^0),$$

где $F_{i\,|\,j}(x_i\,|\,x_j)$ — условная функция распределения.

Теорема. *Если для вероятностного распределения $F_{1\ldots n}(x_1, \ldots, x_n)$ все k-мерные условные квантили $q_{i|1\,\ldots\,k}^{(\mathbf{x}^0)}(x_1, \ldots, x_k)$, $i = k+1, \ldots, n$, где*

$$F_{i\,|\,1\ldots k}\left(q_{i\,|\,1\ldots k}^{(\mathbf{x}^0)}(x_1, \ldots, x_k)\,|\,x_1, \ldots, x_k\right) = F_{i\,|\,1\ldots k}(x_i^0\,|\,x_1^0, \ldots, x_k^0),$$

обладают свойством воспроизводимости при сужении на одномерные условные квантили (см. [2]) и минор, построенный на пересечении первых k столбцов и k строк, начиная со 2-й, определителя (1), отличен от 0, то поверхность в $\mathbf{R}^n$, задаваемая условными квантилями

$$\left\{\Big(x_1, \ldots, x_k, q_{k+1\,|\,1\ldots k}^{(\mathbf{x}^0)}(x_1, \ldots, x_k), \ldots, q_{n\,|\,1\ldots k}^{(\mathbf{x}^0)}(x_1, \ldots, x_k)\Big)\right\}, \tag{2}$$

является k-мерным решением квантильного уравнения Пфаффа

$$\omega = 0. \tag{3}$$

Таким образом, решая уравнение (3), мы находим k-мерные условные квантили по двумерным маргинальным распределениям исходного многомерного распределения. Когда класс Дарбу (см. [2]) формы ω равен $2(n-k)-1$, поверхность (2) является

[13)] Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 16-01-00184 А).

интегральным многообразием уравнения (3) максимальной возможной размерности, проходящим через точку $(x_1^0, \ldots, x_n^0)$.

В качестве статистического приложения теоремы рассмотрен подход к оценке многомерных условных квантилей распределения по двумерным наблюдениям в том случае, когда это распределение обладает свойством воспроизводимости. Показано, что объем двумерных наблюдений, необходимых для построения оценки многомерной квантили в рамках предлагаемого подхода, существенно меньше, чем объем наблюдений полной размерности, необходимых для построения традиционных оценок многомерных условных квантилей. Рассмотрен пример построения оценки условной квантили для эллиптически контурированного распределения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Шатских С. Я.* Необходимое условие воспроизводимости условных квантилей многомерных вероятностных распределений. — Изв. РАЕН, серия МММИУ, 2000, т. 4, № 4, с. 67–72.
2. *Мелкумова Л. Э.*, *Шатских С. Я.* Решение квантильных дифференциальных уравнений Пфаффа при отсутствии полной интегрируемости. — Вестник СГУ, 2012, т. 94, № 3, с. 20–39.

Ширяев А. Н. (Москва, Россия) **Случайность в вероятности.**

Тема настоящего обзорного доклада концентрируется вокруг понятия *случайности* и, более определенно, вокруг того, как можно было бы формально определить, чтó есть *индивидуальная случайная последовательность*.

По словам А. Н. Колмогорова (IV Советско-японский симпозиум, 1982 г.), «В повседневной речи мы называем *случайными* те явления, где мы не находим *регулярности*, которая позволила бы нам точно предсказать их результаты. Вообще говоря, нет оснований считать, что случайное явление должно обладать какой-либо определенной вероятностью. Следовательно, мы должны были бы различать *собственно случайность* (как отсутствие регулярности) и *стохастическую случайность* (которая является объектом теории вероятностей).»

В докладе мы придерживается следующего плана:

§ 2. Частотная теория вероятностей Мизеса.

§ 3. Частотоустойчивость, или стохастичность (Мизес, Вальд, Чёрч, Колмогоров, Ловеланд).

§ 4. Типичность, или принадлежность к множеству эффективной меры единица (Мартин-Лёф, Левин, Шнорр).

§ 5. Сложноустроенность, или хаотичность (Колмогоров, Левин, Шнорр).

§ 6. Непредсказуемость (Вилль, Успенский).

Углич С. И., Павлов И. В., Красий Н. П. (Ростов-на-Дону, Россия) **Численный анализ аналитических результатов, полученных при исследовании квазилинейных моделей со случайными приоритетами.**[14)]

В докладе были использованы аналитические результаты, полученные в работе [1], а также в сообщении Н. П. Красий на конференции ОТНА-2016 в Ростове-на-Дону. В этих работах рассматривается экстремальная задача со следующей целевой функцией:

$$F(x) = E^P(F_1^{\alpha_1} F_2^{\alpha_2}), \quad \text{где } F_k(x) = \left(\sum_{i=1}^n a_i^k x_i + b^k \right) I_{\{\sum_{i=1}^n a_i^k x_i + b^k > 0\}};$$

[14)] Работа выполнена при поддержке РФФИ (проекты № № 16-01-00184, 16-07-00888).

a_i^k, b^k — действительные числа; $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^n$; I — характеристическая функция; $\alpha_k = \alpha_k(\omega)$ — неотрицательные случайные величины, называемые приоритетами, определенные на $(\Omega, \mathscr{F}, P)$. В случаях, когда случайные величины α_1 и α_2 связаны соотношением $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$ или независимы и не превосходят единицы, основной результат формулируется одинаково. Необходимым условием существования глобального максимума является существование такого числа $c > 0$, что $a_i^2 = -c \cdot a_i^1$. Параметр c определяет степень противоположности требований двух систем с целевыми функциями F_1 и F_2. Показано, что для любого $c > 0$ точки максимума функции F представляют собой гиперплоскость вида $\sum_{i=1}^n a_i x_i = t^*$, где t^* — корень некоторого уравнения. В докладе приведены зависимости значения максимума F^* функции F от параметра c при различных α_1 и α_2. Особенно важны для приложений случаи, когда $F^*(c)$ имеет глобальный минимум (например, когда α_1 и α_2 равномерно распределены).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Вагин В. С.*, *Павлов И. В.* Моделирование и оптимизация квазилинейных сложных систем с учетом вероятностного характера приоритетов. — Вестник РГУПС, 2016, т. 61, № 1, с. 135–139.

У л ь я н о в В. В. (Москва, Россия) **Об общем подходе, приводящем к оценкам точности приближений.**[15)]

В первой части доклада дан краткий обзор недавних результатов по оценкам точности приближений для распределений нелинейных форм от случайных элементов. Основное внимание уделяется результатам для квадратичных форм и почти квадратичных форм, рассмотрение которых мотивируется асимптотическими задачами математической статистики (см., например, [1]). При этом приведены асимптотические результаты, когда указывается лишь порядок аппроксимации по n, где n — число случайных элементов (объем выборки), и по p — размерность случайных элементов (наблюдений) при p, сравнимых с n. Даны и неасимптотические результаты, когда вместо порядка убывания доказаны более информативные неравенства для погрешностей приближения. Отмечаются и общие нелинейные формы (см., например, [2]–[4]), встречающиеся, как правило, в многомерной статистике.

Для получения указанных выше результатов используются различные методы. Вместе с тем в работе [5] предложен подход, позволяющий в достаточно общем случае доказывать неасимптотические результаты для нелинейных форм, включая случаи, когда в качестве приближений используются асимптотические разложения, а оценки точности приближений даются в терминах ляпуновских отношений. В [5] рассмотрен класс действительных функций $h_n(\varepsilon, \ldots, \varepsilon_n)$, $n \geqslant 1$, на $\mathbf{R}^n$, симметричных относительно всевозможных перестановок своих аргументов, и таких, что $h_{n+1}(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_j, 0, \varepsilon_{j+1}, \ldots, \varepsilon_n) = h_n(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_j, \varepsilon_{j+1}, \ldots, \varepsilon_n)$ и $(\partial/\partial\varepsilon_j) h_n(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_j, \ldots, \varepsilon_n)|_{\varepsilon_j=0} = 0$ для всех $j = 1, \ldots, n$.

Если рассмотреть последовательность независимых случайных элементов X_j с общим распределением P, то можно взять $h_n = \mathbf{E}\, F(\varepsilon_1(\delta_{X_1} - P) + \cdots + \varepsilon_n(\delta_{X_n} - P))$, т.е. h_n есть среднее гладкого функционала F от *взвешенного* эмпирического процесса с мерами Дирака в $X_1, \ldots, X_n$. Иными словами, h_n можно рассматривать как совокупность «вкладов» случайных элементов X_j. В общем случае зависимость F от этих мер нелинейна. В докладе показано (см. доказательства в [5]), что при выполнении «естественных» моментных условий на рапределение X_1 для указанного класса функций h_n

15) Работа выполнена при поддержке РНФ (проект № 14-11-00196).

существует «предельная» функция, а также можно выписать асимптотические разложения типа Чебышёва–Эджворта. При этом ошибка приближения дается в терминах $|\varepsilon|^d := \sum_{i=1}^n |\varepsilon_i|^d$. В докладе обсуждаются возможные приложения общего подхода, в частности в ЦПТ для взвешенных сумм, когда с большой вероятностью относительно меры на $(n-1)$-мерном единичном шаре распределения взвешенных сумм приближаются нормальным распределением с точностью порядка $O(n^{-1})$. Рассматриваются и применения в асимптотических проблемах для распределений U-статистик порядка 2 и выше и в ЦПТ для «свободных» вероятностей (free probabilities).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Prokhorov Y. V.*, *Ulyanov V. V.* Some approximation problems in statistics and probability. Limit Theorems in Probability, Statistics and Number Theory, ed. P. Eichelsbacher et al., Springer Proceedings in Mathematics and Statistics, 2013, v. 42, p. 235–249.
2. *Fujikoshi Y.*, *Ulyanov V. V.*, *Shimizu R.* Multivariate Statistics: High-Dimensional and Large-Sample Approximations. Hoboken, NJ: John Wiley and Sons Inc., 2010, 533 p.
3. *Ульянов В. В.* О свойствах многочленов от случайных элементов. — Теория вероятн. и ее примен., 2015, т. 60, в. 2, с. 391–402.
4. *Wakaki H.*, *Fujikoshi Y.*, *Ulyanov V. V.* Asymptotic expansions of the distributions of MANOVA test statistics when the dimension is large. — Hiroshima Mathem. J., 2014, v. 44, № 3, p. 247–259.
5. *Götze F.*, *Naumov A. A.*, *Ulyanov V. V.* Asymptotic analysis of symmetric functions. — J. Theoret. Probab., 2016, v. 29. См. также http://arxiv.org/abs/1502.06267v2

Ц в е т к о в а И. В. (Ростов-на-Дону, Россия) **Алгоритм построения интерполяционных мартингальных мер в случае счётного вероятностного пространства и конечнозначных цен акций.**[16)]

Рассмотрим одношаговый $(\mathbf{B},\mathbf{S})$-рынок, который задан на $(\Omega, \mathbf{F})$, где $\mathbf{F} = (\mathscr{F}_k)_{k=0}^1$, $\mathscr{F}_0 = \{\Omega, \varnothing\}$, $\mathscr{F}_1$ — σ-алгебра, порождённая разбиением Ω на счётное число атомов B_i, $i \in N = \{1, 2, \ldots\}$. Пусть $Z = (Z_k, \mathscr{F}_k)_{k=0}^1$ — $\mathbf{F}$-адаптированный случайный процесс со значениями: $Z_0(\Omega) = a$, $Z_1(B_i) = b_i$, $a \in \mathbf{Q}$, $b_i \in \mathbf{Q}$, $i \in \mathbf{N}$ ($\mathbf{Q}$ — множество рациональных чисел чисел). Пусть среди элементов последовательности $\{b_i\}_{i=1}^{\infty}$ всего r различных ($3 \leqslant r < \infty$) и хотя бы два значения имеют бесконечную кратность. Рассматриваемый рынок неполон. Предположим, что он является безарбитражным ($\inf_{1 \leqslant i < \infty} b_i < a < \sup_{1 \leq i < \infty} b_i$). Переход от неполных рынков к полным мы осуществляем с помощью метода специальной хааровской интерполяции, предполагающего существование мартингальных мер, удовлетворяющих специальному интерполяционному свойству (см. [1]). На основе результатов, представленных в работе [2], получен алгоритм вычисления таких мартингальных мер.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Pavlov I. V.* Some processes and models on deformed stochastic bases. — Proceedings of the 2nd International Symposium on Stochastic Models in Reliability Engineering, Life Science and Operations Management (SMRLO16), Frenkel I., Lisnianski A. eds. (Beer Sheva, Israel, February 15–18, 2016), 2016, p. 432–437.
2. *Павлов И. В.*, *Цветкова И. В.*, *Шамраева В. В.* О существовании мартингальных мер, удовлетворяющих ослабленному условию несовпадения барицентров, в случае счетного вероятностного пространства. — Теория вероятн. и ее примен., 2016, т. 61, в. 1, с. 173–181.

16) Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 16-01-00184).

Ч е р н а в с к а я Е. А. (Москва, Россия), Б а ш т о в а Е. Е. (Москва, Россия) **Предельные теоремы для системы обслуживания с бесконечным числом приборов и регенерирующим входящим потоком.**[17)]

Рассматривается бесконечноканальная система обслуживания с регенерирующим входящим потоком $X(t)$, с точками регенерации $\{\theta_i, i \geqslant 0\}$, $\theta_0 = 0$. Эта система является обобщением системы из [1]. Обозначаем $\xi_i = X(\theta_i) - X(\theta_{i-1})$, $\tau_i = \theta_i - \theta_{i-1}$, $i \geqslant 1$. Пусть времена обслуживания представляют собой последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин с функцией распределения $B(t)$. Предполагаем, что $1 - B(t) \sim \mathscr{L}(t)t^{\beta}$ при $t \to \infty$, где $0 < \beta < 1$ и $\mathscr{L}(t)$ — медленно меняющаяся функция. Пусть $q(t)$ — число заявок, находящихся на обслуживании в системе в момент времени t. Обозначим $\kappa = (1-\beta)^{-1}\mathbf{E}\,\xi_1/\mathbf{E}\,\tau_1$.

Теорема. *Пусть* $\mathbf{E}\,\tau_1^r < \infty$, $r > 2$, $\mathbf{E}\,\xi_1^2 < \infty$, *тогда*

$$\frac{q(t) - \kappa t^{1-\beta}\mathscr{L}(t)}{\sqrt{t^{1-\beta}\mathscr{L}(t)}} \xrightarrow{d} \mathscr{N}(0, \kappa) \quad \text{\textit{при} } t \to \infty.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Kaplan N.* Limit theorems for a $GI/G/\infty$ queue. — Ann. Probab., 1975, v. 3, № 5, p. 780–789.

Я р о в а я Е. Б. (Москва, Россия) **Стохастическая эволюция системы частиц в некомпактном фазовом пространстве: подход с использованием ветвящихся случайных блужданий.**[18)]

Различные явления, возникающие в статистической физике, теории гомополимеров, популяционной динамике и других приложениях, часто описываются в терминах эволюции популяций частиц. Такие модели могут обобщаться в различных направлениях, одно из которых заключается в предположении, что частицы не только дают потомство или гибнут, формируя этим ветвящуюся среду, но и мигрируют под действием некоторого случайного закона. Центральная задача в таких моделях — изучение эволюции процессов во времени в зависимости от структуры среды и пространственной динамики частиц. Менее изученными при этом остаются процессы, когда пространство, в котором происходит транспорт частиц, неограниченно, причем оно может быть непрерывным, как, например, в теории гомополимеров, или дискретным, как в моделях динамики клеточных популяций. В этом смысле «универсальными» являются ветвящиеся случайные блуждания с непрерывным временем по многомерным решеткам — стохастические процессы, сочетающие в себе свойства ветвящегося процесса и случайного блуждания. Основные проблемы исследования предельного поведения ветвящихся случайных блужданий связаны с существованием фазовых переходов при изменении различных параметров системы частиц, свойствами предельного распределения популяций частиц, скоростью и формой распространения их фронта. Естественно, решение этих проблем в значительной степени зависят от целого ряда факторов, которые влияют на свойства ветвящегося случайного блуждания, среди которых определяющими являются случайность ветвящейся среды, ее неоднородность, количество и взаимное расположение источников размножения и гибели частиц в точках решетки, а также такие свойства случайного блуждания, как симметричность или

[17)] Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 16-01-00184).
[18)] Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 14-21-00162).

нарушение симметричности, конечность или бесконечность дисперсии скачков. В докладе обсуждаются результаты, полученные в рамках некоторых пространственно-временных эволюционных моделей ветвящихся случайных блужданий, см., например, [1]–[8], и их приложения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Молчанов С. А., Яровая Е. Б.* Предельные теоремы для функции Грина решетчатого лапласиана при больших уклонениях случайного блуждания. — Изв. РАН, Сер. матем., 2012, т. 76, № 6, с. 123–152.
2. *Молчанов С. А., Яровая Е. Б.* Структура популяции внутри распространяющегося фронта ветвящегося случайного блуждания с конечным числом центров генерации частиц. — Докл. Акад. наук, 2012, т. 447, № 3, с. 265–268.
3. *Молчанов С. А., Яровая Е. Б.* Большие уклонения для симметричного ветвящегося случайного блуждания по многомерной решетке. — Труды Матем. ин-та им. В. А. Стеклова, 2013, т. 282, с. 195-211.
4. *Яровая Е. Б.* Структура положительного дискретного спектра эволюционного оператора ветвящихся случайных блужданий. — Докл. Акад. наук, 2015, т. 463, № 6, с. 646–649.
5. *Yarovaya E.* Symmetric branching walks in homogeneous and nonhomogeneous random environments. — Communications in Statistics — Theory and Methods, 2012, v. 41, № 7, p. 0361–0918.
6. *Yarovaya E.* Branching random walks with several sources. — Mathem. Populat. Studies, 2013, v. 20, № 1, p. 14-26.
7. *Yarovaya E.* Operators satisfying the Schur condition and their applications to the branching random walks. — Comm. Statist., Theory and Methods, 2014, v. 43, № 7, p. 1523-1532.
8. *Yarovaya E.* Positive discrete spectrum of the evolutionary operator of supercritical branching walks with heavy tails. — Methodol. Comput. Appl. Probab., 2016, p. 1–17.

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ
Том 61 И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЯ Выпуск 3
2016

СОДЕРЖАНИЕ

Краткие сообщения

C O N T E N T S

Short Communications

Редакционная подготовка и изготовление тиража выполнены
ООО «Редакция журнала «Обозрение прикладной и промышленной математики»» и
ООО «Редакция журнала «Теория вероятностей и ее применения»»

Технический редактор Д. К. Никалев

Лицензия № ЛР-061510 от 08.09.97
Сдано в набор 26.05.2016. Подписано к печати 25.10.1016. Формат бумаги 70 × 100 1/16.
Офсетная печать. Усл. печ. л. 18,2. Уч.-изд. л. 20,7. Бум. л. 6,5.
Тираж 180 экз. Зак. 9341. Свободная цена.

А д р е с р е д а к ц и и: 119991 Москва, ГСП-1, ул. Губкина, 8, тел. +7 (499) 941 01 81.
Цифровая типография ООО «Буки Веди»:
105066, Москва, ул. Новорязанская, д. 38, стр. 1, пом. IV. тел.: 495 926 6396.