Марковские ветвящиеся случайные блуждания по $\mathbb{Z}_+$, связанные с ортогональными многочленами на единичной окружности

А.В. Люлинцев

ПОМИ

Рассматривается марковское ветвящееся случайное блуждание по $\mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, ...\}$ как эволюция популяции частиц. Источники ветвления находятся в каждой точке $\mathbb{Z}_+$: в момент ветвления новые частицы появляются в точке ветвления и далее эволюционируют независимо. Исследуется класс процессов, связанных с ортогональными многочленами на единичной окружности.

Теорема 1. *Пусть матрица оператора $\mathcal{G}$ в стандартном базисе $\ell_2(\mathbb{Z}_+)$ представима в виде $G = \left(S\bar{C}S^* - K - \bar{C}SP\right)^{-1}\left((S\bar{C}S^* - K)PS^* - \bar{C}\right)$, где S — матрица оператора сдивига назад, C, K, P — матрицы, связанные с многочленами $\{\varphi_n\}_{n=0}^{\infty}$, которые ортонормированы по мере γ на единичной окружности $\mathbb{T}$. Тогда*

$$(e^{t\mathcal{G}}\vec{e}_n, \vec{e}_m)_{\ell_2(\mathbb{Z}_+)} = \int_{\mathbb{T}} e^{tz}\varphi_n(z)\overline{\varphi_m(z)}\, d\gamma.$$

Теорема 1 применена к вычислению среднего числа частиц $\mathcal{N}_n(t, m)$ в некотоых конкретных моделях ветвящихся случайных блужданий.

Markov branching random walks on $\mathbb{Z}_+$ associated with orthogonal polynomials on the unit circle

A.V. Lyulintsev

We consider a Markov branching random walk on $\mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, \dots\}$ as an evolution of a population of particles. Branching sources are located at every point of $\mathbb{Z}_+$: at the branching moment, new particles appear at the branching point and then evolve independently. We study a class of processes associated with orthogonal polynomials on the unit circle.

Теорема 1. *Let the matrix of the operator $\mathcal{G}$ in the standard basis of $\ell_2(\mathbb{Z}_+)$ be representable as $G = \big(S\bar{C}S^* - K - \bar{C}SP\big)^{-1}\big((S\bar{C}S^* - K)PS^* - \bar{C}\big)$, where S is the backward shift operator matrix, C, K, P are matrices associated with the polynomials $\{\varphi_n\}_{n=0}^{\infty}$ orthonormal with respect to a measure γ on the unit circle $\mathbb{T}$. Then*

$$(e^{t\mathcal{G}}\vec{e}_n, \vec{e}_m)_{\ell_2(\mathbb{Z}_+)} = \int_{\mathbb{T}} e^{tz}\varphi_n(z)\overline{\varphi_m(z)}\, d\gamma.$$

Theorem 1 is applied to compute the mean number of particles $\mathcal{N}_n(t, m)$ in some specific models of branching random walks.