Асимптотический анализ систем с повторными вызовами при регенерирующем входящем потоке

Афанасьева Л.Г., Баштова Е.Е.

Мы рассматриваем m-канальную систему с повторными вызовами. А именно, в системе имеется m идентичных приборов. Времена обслуживания на каждом приборе - независимые одинаково распределенные случайные величины (н.о.р.с.в.) с функцией распределения $B(x)$. Если в момент поступления требования есть хотя бы один свободный прибор, то требование немедленно начинает обслуживаться. Если же все приборы заняты, то оно отправляется на так называемую орбиту, откуда повторяет попытки попасть на обслуживание.

Мы изучаем процесс $Q(t)$ - число требований в системе (на орбите и на приборах вместе).

Предполагаем, что входящий поток $X(\cdot)$ является регенерирующим. Введем дополнительное условие на входящий поток и времена обслуживания.

Условие 1.

$$\mathsf{P}(\xi_1 = 0, \tau_1 > 0) + \mathsf{P}(\xi_1 = 1, \tau_1 - t_1 > \eta_1) > 0.$$

Здесь $\xi_j = X(\theta_j) - X(\theta_{j-1})$ - количество требований, пришедших за период регенерации.

Мы рассматриваем две модели, различающиеся правилами формирования повторных вызовов с орбиты.

Для модели M_1 вызовы с орбиты поступают тем чаще, чем больше на орбите требований. А именно, когда на орбите находится j требований, то запросы с нее поступают в соответствии с пуассоновским потоком интенсивности $\nu(j)$. В работе [1] доказана теорема об условиях стабильности модели M_1. Сформулируем теперь теорему об асимптотическом поведении количества требований в перегруженной системе.

Теорема 1. *Пусть* $\rho_I = \lambda b/m > 1$, $\mathsf{E}\tau_i^r < \infty$, $\mathsf{E}\xi_i^r < \infty$, $\mathsf{E}\eta_i^r < \infty$, *для некоторого* $r > 2$ *и*

$$j^{-1+1/r}\nu(j) \to \infty, \quad as\ j \to \infty.$$

Тогда существует стандартный Винеровский процесс W *такой что*

$$\sup_{0 \le u \le t} \|Q(u) - (\rho_I - 1)u - \sigma_I W(u)\| = o(t^{1/r}),\ \text{п.н.},$$

where $\sigma_I^2 = \sigma_X^2 + m\sigma_S^2$.

В модели M_2 запросы с орбиты поступают через н.о.р. интервалы. Если в момент запроса есть свободный прибор, а на орбите есть требования, то одно из них отправляется на обслуживание.

Пусть $\{\zeta_n\}_{n=1}^{\infty}$ - последовательность н.о.р.с.в., представляющих собой интервалы между запросами с орбиты, $N(t)$ - процесс восстановления, построенный по последовательности $\{\zeta_n\}_{n=1}^{\infty}$, его интенсивность $\nu = \lim\limits_{t\to\infty} N(t)/t$.

Условие 2. Случайные величины ζ_n, $n \in \mathrm{N}$ имеют экспоненциальную фазу, т.е.

$$\zeta_n = \zeta_n^{(1)} + \zeta_n^{(exp)},$$

$\zeta_n^{(1)}$ и $\zeta_n^{(exp)}$ независимы, и $\zeta_n^{(exp)}$ имеют экспоненциальное распределение.

Для формулировки результатов необходимо ввести вспомогательную систему M_0 с m приборами, входящим потоком $U(t) = X(t) + N(t)$ и **отказами**.

Обозначим $n(t)$ - число занятых приборов в M_0, а t_k - k-ый момент поступления требования в M_0. В статье [1] показано, что при выполнении условий 1 и 2 существуют

$$\lim_{k\to\infty} \mathsf{P}(n(t_k) = j) = \mathsf{P}_j, \quad j = \overline{1, m},$$

коэффициент загрузки системы равен

$$\rho_c = \frac{\lambda}{(\lambda+\nu)(1-P_m)}$$

и доказана эргодическая теорема. Основной результат доклада, касающийся системы M_2 – сильная гауссовская аппроксимация длины очереди в ситуации, когда система перегружена.

Теорема 2. *Пусть $\rho_c > 1$, выполнено условие 2 и $\mathsf{E}\tau_i^r < \infty$, $\mathsf{E}\xi_i^r < \infty$, $\mathsf{E}\eta_i^r < \infty$ $\mathsf{E}\zeta_i^r < \infty$, для некоторого $r > 2$. Тогда существуют константа $\sigma_c^2 > 0$ и стандартный Винеровский процесс W так что*

$$\sup_{0\le u\le t} \|Q(u) - (\rho_c - 1)u - \sigma_c W(u)\| = o(t^{1/r}), \ a.s.,$$

при $t \to \infty$.

Основная идея доказательств теорем 1 и 2 состоит в построении мажорирующих систем, в частности, системы без орбиты и с общей очередью и системы с отказами и сложно устроенным входящим потоком. Затем используются результаты работы [3] о сильной гауссовской аппроксимации регенерирующих потоков.

Работа поддержана грантом РФФИ 20-01-00487.

Литература

1. Л. Г. Афанасьева, “Условия стабильности системы с повторными вызовами при регенерирующем входящем потоке”, Фундамент. и прикл. матем., 22:3 (2018), 5–18
2. Afanasyeva, L.G., Bashtova, E.E.: Coupling method for asymptotic analysis of queues with regenerative input and unreliable server. Queueing Systems. V. 76, pp. 125–147 (2014)
3. E. Bashtova, A. Shashkin, Strong Gaussian approximation for cumulative processes, Stochastic Processes and their Applications, 2022, ISSN 0304-4149, https://doi.org/10.1016/j.spa.2022.04.003.
4. Zhang Hanqin, Hsu Guanghui and Wang RongxinStrong Approximations for Multiple Channel Queues in Heavy Traffic Author(s): Source: Journal of Applied Probability, Vol. 27, No. 3 (Sep., 1990), pp. 658-670