Оптимизация системы массового обслуживания с перерывами на основе стоимостного критерия

Афанасьев Г.А.

Россия, Москва. Ярославское ш., д. 26, e-mail: AfanasievGA@mgsu.ru

Рассматриваются одноканальные системы массового обслуживания, в которых прибор в моменты освобождения системы от требований на некоторые промежутки времени становится недоступным для обслуживания требований. Эти промежутки назовем перерывами (в англоязычной литературе – “vacations”). Изучение таких систем началось давно (см., например [1]), но в последние годы интерес к ним существенно возрос. Ссылки на наиболее важные результаты можно найти в статье [2]. Перерыв в обслуживании может быть следствием многих факторов. Например, владелец прибора не желает его длительных простоев и когда нет запросов на обслуживание с некоторой вероятностью сдает его в аренду на время η. Это приносит доход C_1, который возможно зависит от η или функции распределения η, если η – случайная величина. С другой стороны, сдача прибора в аренду может привести к увеличению числа ожидающих требований, что связано с определенными убытками. Считаем, что за пребывание в системе одного требования в единицу времени владелец выплачивает сумму C_2. Наша задача – найти значение вероятности сдачи прибора в аренду α и длительность перерыва η, которые максимизируют среднюю прибыль.

Сделаем следующие предположения. Входящий поток требований в систему вне перерывов X – пуассоновский процесс интенсивности λ, время обслуживания имеет произвольное распределение со средним b и вторым моментом $b_2 < \infty$, так что вне перерывов в символике Кендалла мы имеем систему M|G|1|∞. В моменты, когда система освобождается от обслуживания требований, прибор с вероятностью α уходит на перерыв (сдается в аренду), а с вероятностью $1-\alpha$ ждет поступления нового требования потока X.

Если после окончания перерыва в системе нет требований, то с вероятностью α начинается новый перерыв, а с вероятностью $1-\alpha$ при следующем скачке процесса X начинается обслуживание требования.

Число требований в системе в течение перерыва определяется процессом Y, который вообще говоря, отличается от X и $Y(t)$ – число требований через время t после начала перерыва.

Считается заданными следующие характеристики системы

$$\rho = \lambda b,\ \ \bar{\eta} = E\eta,\ \ Y_1 = EY(\eta),\ \ Y_2 = EY^2(\eta),$$

$$\delta = \int_0^{\infty} EY(t)1(\eta > t)dt\,, \gamma = 1 - \lambda\bar{\eta}(1-\rho) - \rho Y_1. \qquad (1)$$

Средний доход $W(\alpha)$ в стационарном режиме определяется равенством

$$W(\alpha) = \frac{\alpha(C_1\lambda(1-\rho) - C_2 D_1) - C_2\bar{q}_0}{1-\alpha\gamma},$$

где

$$D_1 = \lambda(1-\rho)\delta + \frac{\rho(Y_2 - Y_1)}{2} - (1 - Y_1)\overline{q_0},\ \ \overline{q_0} = \rho + \frac{\lambda^2 b_2}{2(1-\rho)}. \qquad (2)$$

Сначала, считая распределение η заданным, найдем α_0, доставляющее максимум функции $W(\alpha)$.

Теорема 1. Пусть $\rho = \lambda b < 1$, $b_2 < \infty, Y_2 < \infty$.

Если

$$C_1(x) > \frac{C_2(\gamma\bar{q}_0 + D_1)}{\lambda(1-\rho)}, \qquad (3)$$

где $\gamma, \bar{q}_0, D_1$ определены в (1) и (2), то перерыв (сдачу в аренду) следует осуществлять с вероятностью единица, т.е. $\alpha_0 = 1$.

В противном случае перерывы не допускаются, т.е. $\alpha_0 = 0$.

Доказательство опирается на результаты статьи [2].

Далее предположим, что Y – пуассоновский процесс с интенсивностью λ, а продолжительность перерыва неслучайна и равна *x*. Доход от сдачи прибора в аренду на время *x* составляет сумму $C_1(x)$. Тогда в соответствии с (1) и (2) условие (3) принимает вид

$$C_1(x) > \frac{\lambda C_2}{2(1-\rho)} x^2. \qquad (4)$$

Положим

$$\Lambda = \{x > 0\text{: выполнено } (4)\}.$$

После несложных выкладок из теоремы 1 получаем следующий результат.

Следствие 1 Если Λ – непустое множество , то перерыв любой продолжительности $x \in \Lambda$ надо осуществлять с вероятностью единица. Оптимальное значение x_0, максимизирующее средний доход в единицу времени, является точкой максимума функции

$$\varphi(x) = \frac{C_1(x)}{x}(1-\rho) - C_2\frac{\lambda x}{2}.$$

В качестве примера рассмотрим случай, когда доход от перерыва

$$C_1(x) = c_1 x - d1(x > 0), \qquad (5)$$

где d – издержки, связанные с организацией перерыва (или аренды), 1(A) – индикатор события A.

Следствие 2. Пусть $C_1(x)$ определена равенством (5).

Если

$$c_1\sqrt{1-\rho} < \sqrt{2d\lambda C_2}, \qquad (6)$$

то перерыв следует делать с вероятностью единица и его оптимальная продолжительность

$$x_0 = \sqrt{\frac{2d(1-\rho)}{\lambda C_2}}.$$

Если (6) не выполняется, то перерыв делать не следует.

Рассмотрен также случай квадратичной зависимости $C_1(x)$ от x.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 20-01-00487.

Литература

1. Y. Levy, N Yechiali, Utilization of idle time in an M|G|1 queueing system. Msnegement Sci., 22:2, 1975, 202-211

2. Г.А. Афанасьев, Система M|G|1 с перерывами в работе прибора и их задержками, Теория вероятностей и ее приложения, 2021, 66, № 1, pp. 3-19.