Применение бинарного дерева в задачах управления процессами с разладкой

(Данилова Н.В., Белявский Г.И., Южный федеральный университет, г. Ростов-на-Дону)

В докладе рассматривается задача управления для бинарной модели с разладкой. Рассматривается апостериорный подход, то есть в результате наблюдения обнаруживается разладка с последующей четкой и нечеткой кластеризацией вершин дерева. На основе этой кластеризации выстраивается алгоритм решения задачи. Используются как симметричный, так и несимметричный штрафы за недостижение поставленной цели управления. Далее анализируется возможность использования бинарной модели в качестве средства приближения непрерывной модели Блэка-Шоулса с разладкой, причем исследуется возможность редукции NP - полной задачи к P - полной задаче с потерей информации.

Задача управления решается в следующей постановке: $\min_{\beta,x_0} E\big(\Phi(У_N,\xi)\big)$, при ограничениях: $У_n = y_0 + \sum_{i=1}^{n} \beta(i)\, \Delta S_i$, $n \in \{1,\dots,N\}$, $\Delta S_n = \varphi(S_{n-1}) a^{X_n} b^{1-X_n}$, $X_n \in \{0,1\}, P(X_n = 1/n < \theta) = q_\infty$, $P(X_n = 1/n \geq \theta) = q_0.$, $y_0 \leq \alpha$. Разладка θ – случайная величина с множеством значений $\boldsymbol{Z} = \{1,2,\dots\}$ и известным распределением вероятностей. Предполагается, что математическое ожидание $E|\Phi(Y_N,\xi)| < \infty$. Модель функционирует на естественном стохастическом базисе $\langle \Omega, (F)_{n\geq 0}, F, P\rangle$. Справедливо утверждение.

Утверждение. Если мартингальная мера P^* ($\langle S_n, F_n, P^*\rangle$ - мартингал) существует и единственная, если существует решение задачи $\min_{\eta} E\big(\Phi(\eta,\xi)\big)$ при ограничении: $E^*\eta \leq \alpha$, то задача управления имеет решение.

В этой задаче первое математическое ожидание вычисляется по исходной мере, в формировании которой участвует разладка. Второе математическое ожидание вычисляется по мартингальной мере.

Схема решения задачи управления такова: сначала находится η^* - решение задачи: $\min_{\eta} E\big(\Phi(\eta,\xi)\big)$ при ограничении: $E^*\eta \leq \alpha$, затем вычисляется мартингал $Y_n = E^*(\eta^*/F_n)$ и разложение мартингала Y по мартингалу S.

В рассматриваемой модели существует единственная мартингальная мера, если для параметров модели выполняется неравенство: $a < 0 < b$.

Сначала в докладе рассматривается бинарное дерево с вершинами $\left[\left(A_n^i\right)_{i=0}^{2^n-1}\right]_{n=0}^{N}$ в котором $A_n^i \to \{A_{n+1}^{2i}, A_{n+1}^{2i+1}\}$. Установливается изоморфизм между отрезками бинарной последовательности ω_1^n и вершинами дерева A_n^i. Этот изоморфизм задается следующим образом: отрезок бинарной последовательности ω_1^n изоморфен вершине A_n^i тогда и только тогда, когда $i = \sum_{k=1}^{n} 2^{n-k}\omega_k$.

Разладка в модели заменяется на ее оценку моментом остановки. Рассмотрим произвольный момент остановки τ, например, оценку разладки. Момент остановки разделяет вершины дерева на два класса в соответствии с правилом: вершина A_n^i относится к первому классу (H_1) вершин, если $\tau(A_n^i) = n$; если A_n^i относится к первому классу, то вершины A_{n+1}^{2i} и A_{n+1}^{2i+1} также относятся к первому классу. Остальные вершины дерева относятся ко второму классу (H_2).

Исходная мера в модели вычисляется с помощью рекуррентных уравнений, которые используют разбиение вершин дерева моментом остановки. Эти уравнения имеют следующий вид:

$$P(A_n^{2i+1}) = \begin{cases} q_0 P(A_{n-1}^i), A_{n-1}^i \in H_1 \\ q_\infty P(A_{n-1}^i), A_{n-1}^i \in H_2 \end{cases}, P(A_n^{2i}) = \begin{cases} (1-q_0) P(A_{n-1}^i), A_{n-1}^i \in H_1 \\ (1-q_\infty) P(A_{n-1}^i), A_{n-1}^i \in H_2 \end{cases}, P(A_0^0) = 1.$$

Далее рассматривается случайное блуждание: $\varsigma_0 = 0, \varsigma_n = \varsigma_{n-1} + X_n$ и редуцированное дерево с вершинами $\{A_n^i\}_{i=0}^{n}, n = 1,2 \dots, N$, и дугами $A_n^i \to A_{n+1}^i, A_n^i \to A_{n+1}^{i+1}$. Изоморфизм устанавливается между случайной величиной: ς_n и вершиной $A_n^{\varsigma_n}$. Для данного дерева мы используем нечеткую классификацию. Принадлежность вершины классу H_1 рассматривается как случайное событие, которое наступает с вероятностью $P(A_n^i \in H_1) = p_{n.i}$. Вероятности $p_{n.i}$ выражаются через отношения правдоподобия $\psi_n(i) = \frac{P(\theta \le n \,/\, \varsigma_n = i)}{P(\theta > n \,/\, \varsigma_n = i)} = \frac{\zeta_n(i)}{C_n^i q_\infty^i (1-q_\infty)^{n-i} P(\theta > n)}$, $\zeta_n(i) = \sum_{j=1}^{n} P(\varsigma_n = i \,/\, \theta = j)\, P(\theta = j)$, а именно, $p_{n,i} = \frac{\psi_n(i)}{1+\psi_n(i)}$. В докладе приводятся равенства, позволяющие вычислить $\zeta_n(i)$. Вероятности $p_{n,i}$ позволяют вычислить исходную меру для данной модели следующим образом $P(A_0^0) = 1, P(A_n^0) = P(A_{n-1}^0)\left((1-q_0)p_{n-1,0} + (1-q_\infty)(1-p_{n-1,0})\right)$, $P(A_n^n) = P(A_{n-1}^{n-1})\left(q_0 p_{n-1,n} + q_\infty(1-p_{n-1,n})\right)$, $P(A_n^i) = P(A_{n-1}^i)\left((1-q_0)p_{n-1,i} + (1-q_\infty)(1-p_{n-1,i})\right) + P(A_{n-1}^{i-1})\left(q_0 p_{n-1,i} + q_\infty(1-p_{n-1,i})\right), i \ne 0, i \ne n$.

В докладе рассматривается бинарная аппроксимация уравнения Блэка – Шоулса с разладкой: $dS_t = S_t\left(\left(m_1 I(t<\theta) + m_2 I(t \ge \theta)\right)dt + \sigma dW_t\right)$, W_t – стандартное броуновское движение, которая выглядит следующим образом: $\Delta S_{nh}^h = S_{(n-1)h}^h \left(\sigma\sqrt{h}\right)^{X_n} \left(-\sigma\sqrt{h}\right)^{1-X_n}$, $q_\infty = P(X_i = 1 \,/\, i \le \theta) = \frac{1}{2} + \frac{m_1\sqrt{h}}{2\sigma}$, $q_0 = P(X_i = 1/i > \theta) = \frac{1}{2} + \frac{m_2\sqrt{h}}{2\sigma}$.

Для этой модели рассматриваются задачи оптимального инвестирования для различных критериев качества портфеля инвестиций.

В докладе приводятся и комментируются примеры вычислений. Приводится и комментируется список литературы.