Циклический алгоритм с продлением и дообслуживанием при управлении конфликтными потоками неоднородных требований

Федоткин А. М.[1], Маркина Н. С.[2]

Россия, Нижний Новгород,
Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского,
Институт информационных технологий, математики и механики,
кафедра дифференциальных уравнений, математического и численного анализа[1]
кафедра теории вероятностей и анализа данных[2]
fandr@vmk.unn.ru[1], natalia.marckina2010@yandex.ru[2]

В работе [1] исследована математическая модель реальной системы циклического управления конфликтными транспортными потоками малой интенсивности на изолированном перекрёстке. Рассмотрим теперь систему управления конфликтными неординарными пуассоновскими потоками Π_1 и Π_2 [2] с помощью циклического алгоритма с продлением и дообслуживанием. При $j = 1, 2$ поток Π_j является неординарным пуассоновским с интенсивностью λ_j для вызывающих моментов. В каждый вызывающий момент по потоку Π_j может поступить одна, две или три заявки соответственно с вероятностью p_j, q_j или s_j, где $p_j + q_j + s_j = 1$. Множество состояний обслуживающего устройства, реализующего циклический алгоритма с продлением и дообслуживанием, будем обозначать через $\Gamma = \{\Gamma^{(1)}, \Gamma^{(2)}, \Gamma^{(3)}, \Gamma^{(4)}\}$, где длительность каждого состояния $\Gamma^{(e)}$ при $e \in M = \{1, 2, 3, 4\}$ равна T_e. При каждом состоянии $\Gamma^{(2j-1)}$ обслуживается только поток Π_j с пропускной способностью $l_j = [\mu_j T_{2j-1}]$, где μ_j – интенсивность обслуживания заявок этого потока. Состояние $\Gamma^{(2j)}$, $j = 1, 2$, соответствует процессу переналадки обслуживающего устройства после обслуживания соответствующего потока. В это время дообслуживаются только заявки потока Π_j, которые уже начали обслуживаться в предыдущем состоянии. Считаем, что $T_{2j-1} > T_{2j}$. Пропускную способность в состоянии $\Gamma^{(2j)}$ обозначаем $l'_j = [\mu_j T_{2j}]$, $l'_j \le l_j$. Смена текущего состояния обслуживающего устройства или его продление принимается в случайные моменты времени $\tau_0, \tau_1, \ldots$ Пусть случайный элемент $\Gamma_i \in \Gamma$ есть состояние обслуживающего устройства на промежутке времени $[\tau_i, \tau_{i+1})$ при $i \in I = \{0, 1, \ldots\}$. Будем предполагать, что $\tau_{i+1} = \tau_i + f(\Gamma_i)$, $i \in I$, где $f(\Gamma^{(e)}) = T_e$, $e \in M$. Так как потоки Π_1 и Π_2 не могут обслуживаться одновременно на любом промежутке $[\tau_i, \tau_{i+1})$, то они являются конфликтными [1]. Введем следующие случайные величины, с помощью которых обозначим характеристики системы на этих промежутках времени:

- $\eta_{j,i} \in X = \{0, 1, \ldots\}$ — количество поступивших в систему требований потока Π_j за промежуток времени $[\tau_i, \tau_{i+1})$;
- $\varkappa_{j,i} \in X$ — количество находящихся в очереди ожидания требований потока Π_j в момент времени τ_i;
- $\xi_{j,i} \in \{0, l'_j, l_j\}$ — максимальное количество требований потока Π_j, которое может быть обслужено за промежуток времени $[\tau_i, \tau_{i+1})$;
- $\xi'_{j,i} \in Y_j = \{0, 1, \ldots, l_j\}$ — реально обслуженное количество требований потока Π_j за промежуток времени $[\tau_i, \tau_{i+1})$.

На содержательном уровне процесс обслуживания требований и управление потоками можно описать следующим образом. Обозначим через $h_1 \in \{0, 1, \ldots, l_1 - 1\}$ величину порога потока Π_1 и через $h_2 \in \{0, 1, \ldots, l_2 - 1\}$ величину порога потока Π_2. Обслуживание первого потока происходит в состоянии $\Gamma^{(1)}$, при этом второй поток не обслуживается. Если $\varkappa_{2,i} + \eta_{2,i}$ не достигнет величины h_2 к концу текущего интервала $[\tau_i, \tau_{i+1})$, то обслуживающее устройство продлевает состояние $\Gamma^{(1)}$ на такой же промежуток времени, иначе переходит в следующее состояние $\Gamma^{(2)}$. Пусть теперь обслуживание второго потока происходит в состоянии $\Gamma^{(3)}$, при этом первый поток не обслуживается. Аналогично, если по первому потоку Π_1 очередь меньше порогового значения h_1, то обслуживающее устройство продлевает состояние $\Gamma^{(3)}$ на такой же промежуток времени, иначе переходит в состояние $\Gamma^{(4)}$. Из остальных состояний обслуживающее устройство может перейти только в следующее состояние, то есть из $\Gamma^{(2)}$ в $\Gamma^{(3)}$ и из $\Gamma^{(4)}$ в $\Gamma^{(1)}$. Состояния $\Gamma^{(2)}$ и $\Gamma^{(4)}$ соответствуют периоду дообслуживания только заявок первого потока и только заявок второго потока. При $h_2 = 0$ и $h_2 = 0$ приведенный выше алгоритм управления превращается в циклический на множестве состояний $\{\Gamma^{(1)}, \Gamma^{(2)}, \Gamma^{(3)}, \Gamma^{(4)}\}$. Величина порога h_j ограничена сверху пропускной способностью l_j. Это сделано потому, что в случае $h_j \geq l_j$ система не сможет справиться с обслуживанием потока Π_j. Тогда по этому потоку начнет возрастать количество ожидающих требований обслуживания и управление будет неэффективно.

При $\Gamma^{(e)} \in \Gamma$, $x_1 \in X$, $m_1 \in X$, $x_2 \in X$, $m_2 \in X$ определим теперь функцию

$$u(\Gamma^{(e)}, x_1, m_1, x_2, m_2,) = \begin{cases} \Gamma^{(e+1)}, & e = 2; \\ \Gamma^{(1)}, & e = 4; \\ \Gamma^{(1)}, & e = 1, x_2 + m_2 < h_2; \\ \Gamma^{(2)}, & e = 1, x_2 + m_2 \geq h_2; \\ \Gamma^{(3)}, & e = 3, x_1 + m_1 < h_1; \\ \Gamma^{(4)}, & e = 3, x_1 + m_1 \geq h_1. \end{cases}$$

Математической моделью система управления конфликтными неординарными пуассоновскими потоками Π_1 и Π_2 с помощью циклического алгоритма с продлением и дообслуживанием является многомерная случайная последовательность вида

$$\{(\Gamma_i, \varkappa_{1,i}, \varkappa_{2,i}, \xi'_{1,i-1}, \xi'_{2,i-1}), i \in I\},$$

где

$$\begin{aligned} \Gamma_{i+1} &= u(\Gamma_i, \varkappa_{1,i}, \eta_{1,i}, \varkappa_{2,i}, \eta_{2,i}), \\ \varkappa_{1,i+1} &= \max\{0, \varkappa_{1,i} + \eta_{1,i} - \xi_{1,i}\}, \\ \varkappa_{2,i+1} &= \max\{0, \varkappa_{2,i} + \eta_{2,i} - \xi_{2,i}\}, \\ \xi'_{1,i} &= \min\{\varkappa_{1,i} + \eta_{1,i}, \xi_{1,i}\}, \\ \xi'_{2,i} &= \min\{\varkappa_{2,i} + \eta_{2,i}, \xi_{2,i}\}. \end{aligned} \tag{1}$$

Справедлива следующая теорема.

Теорема 1. Многомерная случайная последовательность

$$\{(\Gamma_i, \varkappa_{1,i}, \varkappa_{2,i}, \xi'_{1,i-1}, \xi'_{2,i-1}), i \in I\},$$

для которой выполняются приведенные выше соотношения (1), с заданным начальным распределением вектора $(\Gamma_0, \varkappa_{1,0}, \varkappa_{2,0}, \xi'_{1,-1}, \xi'_{2,-1})$ на пространстве $\Gamma \times X \times X \times Y_1 \times Y_2$ является однородной многомерной марковской цепью.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Федоткин А. М., Федоткин М. А.* Анализ и оптимизация выходных процессов при циклическом управлении конфликтными транспортными потоками Гнеденко-Коваленко. Автоматика и телемеханика. 2009, № 12, с. 92–108.
2. *Федоткин М. А., Федоткин А. М., Кудрявцев Е. В.* Динамические модели неоднородного потока транспорта на магистралях. 2020, № 8, с. 149–164.