Исследование предельных свойств системы адаптивного управления конфликтными потоками Кокса-Льюиса

Кудрявцев Е. В., Федоткин М. А.

Россия, Нижний Новгород,
Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского,
Институт информационных технологий, математики и механики,
кафедра теории вероятностей и анализа данных
evgkudryavcev@gmail.com, fma5@rambler.ru

Исследуется система управления конфликтными неординарными пуассоновскими потоками. Рассматриваемые неординарные потоки [1] задаются интенсивностью λ потока вызывающих моментов и распределением количества χ требований в вызывающий момент

$$\mathbf{P}(\chi=1)=\frac{1}{1+\alpha+\alpha\beta(1-\gamma)^{-1}},$$
$$\mathbf{P}(\chi=2)=\frac{\alpha}{1+\alpha+\alpha\beta(1-\gamma)^{-1}},$$
$$\mathbf{P}(\chi=k)=\frac{\alpha\beta\gamma^{k-3}}{1+\alpha+\alpha\beta(1-\gamma)^{-1}},\quad k\geq 3,$$

где α, β и γ — параметры потока.

Два независимых конфликтных неординарных пуассоновских потока Π_1 и Π_2 обслуживаются с помощью адаптивного нециклического алгоритма [2–4]. Обслуживающее устройство имеет восемь состояний $\{\Gamma^{(1)},\ldots,\Gamma^{(8)}\}$. Требования входных потоков поступают в неограниченные накопители O_1 и O_2. Система рассматривается в дискретные моменты τ_i — моменты смены состояний обслуживающего устройства. Состояние обслуживающего устройства и длины очередей по потокам Π_1 и Π_2 в момент τ_i задаются величинами Γ_i и $(\kappa_{1,i},\kappa_{2,i})=\kappa_i$. Число заявок потоков Π_1 и Π_2, поступивших в систему за промежуток $[\tau_i,\tau_{i+1})$ обозначим через $(\eta_{1,i},\eta_{2,i})=\eta_i$. Алгоритм управления учитывает очередность прихода заявок, поэтому обозначим через η_i' вектор, принимающий значение $y_0=(0,0)$, если на i-ом такте $[\tau_i,\tau_{i+1})$ в систему не поступило ни одной заявки, и принимающий значения $y_1=(1,0)$ и $y_2=(0,1)$, если на i-ом такте первой пришла заявка (или заявки) потоков Π_1 и Π_2 соответственно. Максимальное число заявок потоков Π_1 и Π_2, которые могут быть обслужены на промежутке $[\tau_i,\tau_{i+1})$, обозначим через $(\xi_{1,i},\xi_{2,i})=\xi_i$.

Адаптивный алгоритм смены состояний обслуживающего устройства из множества Γ задается с помощью рекуррентного соотношения:

$$\Gamma_{i+1}=\begin{cases}\Gamma^{(3j-2)}, & \Big\{\Big[\Gamma_i=\Gamma^{(3s)}\Big]\,\&\,[(\kappa_{j,i}>0)\vee(\kappa_{s,i}\geq K_s)\vee(\eta_i'=y_j)]\Big\}\vee\\ & \vee\Big\{\Big[\Gamma_i=\Gamma^{(3j)}\Big]\,\&[\kappa_{s,i}=0]\&[\kappa_{j,i}\leq K_s]\&[\eta_i'=y_j]\Big\},\\ \Gamma^{(3j-1)}, & \Big\{\Gamma_i=\Gamma^{(3j-2)}\Big\}\vee\Big\{\Big[\Gamma_i=\Gamma^{(6+j)}\Big]\,\&[\eta_i'=y_j]\Big\},\\ \Gamma^{(3j)}, & \Big\{\Gamma_i=\Gamma^{(3j-1)}\Big\}\vee\Big\{\Big[\Gamma_i=\Gamma^{(6+j)}\Big]\,\&[\eta_i'\neq y_j]\Big\},\\ \Gamma^{(6+j)}, & \Big[\Gamma_i=\Gamma^{(3s)}\Big]\,\&[\kappa_{j,i}=0]\&[\kappa_{s,i}<K_s]\&[\eta_i'=y_0],\end{cases}$$

при $j,s=1,2,\ j\neq s$. Величины K_1 и K_2 являются параметрами алгоритма.

Адаптивный алгоритм подобного типа был реализован в виде системы «СПРУТ» в 70-е годы. Данная система и ее простейшая модификация использовались для управления транспортными потоками на локальных перекрестках в Нижнем Новгороде и Омске.

Динамика длины очереди задается следующими рекуррентными соотношениями

$$\kappa_{j,i+1} = \begin{cases} \max\{0; \kappa_{j,i} + \eta_{j,i} - \xi_{j,i}\}, & \text{если } \Gamma_i \in \Gamma \backslash \{\Gamma^{(3)}, \Gamma^{(6)}\}; \\ \eta_{j,i} + \max\{0; \kappa_{j,i} - \xi_{j,i}\}, & \text{если } \Gamma_i \in \{\Gamma^{(3)}, \Gamma^{(6)}\}. \end{cases}$$

Векторная последовательность $\{(\Gamma_i, \kappa_i); i = 0, 1, \ldots\}$ является марковской [2]. Марковская цепь является разложимой. Множество состояний цепи разбивается на класс несущественных состояний и неразложимый апериодическим класс существенных состояний.

Одномерные распределения последовательности $\{(\Gamma_i, \kappa_i); i = 0, 1, \ldots\}$ задаются в виде

$$\mathbf{P}(\Gamma_i = \Gamma^{(r)}, \kappa_{1,i} = x_1, \kappa_{2,i} = x_2) = Q_i^r(x_1, x_2), \quad r = \overline{1,8}, \quad x_1, x_2 \in \{0, 1, 2, \ldots\}.$$

Пусть $z = (z_1, z_2)$, где z_j при $j = 1, 2$ есть действительная или комплексная переменная. При $x = (x_1, x_2)$ определим $z^x = z_1^{x_1} z_2^{x_2}$. Рассмотрим производящие функции

$$W_i^{(r)}(z) = \sum_{x_1=0}^{\infty} \sum_{x_2=0}^{\infty} Q_i^{(r)}(x) z^x, r = \overline{1,8};$$

$$W_i(z) = \sum_{r=1}^{8} W_i^{(r)}(z).$$

Введем обозначения $\overline{z}_1 = (z_1, 1)$, $\overline{z}_2 = (1, z_2)$ и $\overline{1} = (1, 1)$. В работе [3] приведена следующая теорема.

Теорема 1. Для существования предельного распределения марковской последовательности $\{(\Gamma_i, \kappa_i); i \geq 0\}$ необходимо и достаточно, чтобы выполнялось следующее условие: существует число $\varepsilon > 0$, что при любом распределении случайного элемента (Γ_0, κ_0) найдется номер I такой, что для любых $i > I$ и $j, s = 1, 2$, $j \neq s$ выполняется:

$$\Lambda_j T - L_j + \frac{d}{dz_j} \Upsilon_{6i}(\overline{z}_j)|_{z_j=1} + (L_j T_{3j-1} - l_{3j-1}) \times$$
$$\times \sum_{v=0}^{5} \sum_{k=1}^{n_j-1} (k - n_j) \Phi_{6i+v,k}^{(3j-1)}(\overline{1}) + \Lambda_j T_{3s-1} \sum_{v=0}^{5} \sum_{k=1}^{n_s-1} (k - n_s) \Phi_{6i+v,k}^{(3s-1)}(\overline{1}) < -\varepsilon,$$

где Λ_j, T, T_{3j-1}, l_{3j-1}, L_j, n_j при $j = 1, 2$ — параметры системы, а $\Upsilon_{6i}(\overline{z}_j)$ и $\Phi_{6i+v,k}^{(3j-1)}(\overline{1})$ — вспомогательные производящие функции.

Заметим, что все параметры системы и указанные вспомогательные производящие функции определены в работе [3]. Следствием из доказательства теоремы 1 является следующее утверждение.

Лемма 1. Пусть начальное распределение векторной марковской последовательности $\{(\Gamma_i, \kappa_i); i \geq 0\}$ удовлетворяет условию $W_0(z) < \infty$ при некотором $z = (z_1, z_2)$ и $z_1, z_2 > 1$. Тогда для существования предельного распределения последовательности необходимо и достаточно, чтобы функции $W_{6i}(\overline{z}_j)$ при $i \geq 0$, $j = 1, 2$, были ограничены равномерно по i в некоторой правой полуокрестности точки $z_j = 1$.

Докажем теперь теорему существования предельного распределения для данной последовательности.

Теорема 2. Если начальное распределение векторной марковской последовательности $\{(\Gamma_i, \kappa_i); i \geq 0\}$ при некотором $z = (z_1, z_2)$ и $z_1, z_2 > 1$ удовлетворяет условию $W_0(z) < \infty$, то для существования предельного распределения данной последовательности необходимо и достаточно, чтобы производящие функций $W_{6i}(z)$ были ограничены равномерно по i в некоторой окрестности точки $z = (1, 1)$.

Доказательство. Для доказательства теоремы 2 необходимо рассмотреть функции $W_{6i}(z)$, $i \geq 0$ в окрестности точки $z = (1, 1)$.

Достаточность. Из равномерной ограниченности двухмерных аналитических функций $W_{6i}(z)$ в окрестности точки $z = (1, 1)$ следует равномерная ограниченность данных функций $W_{6i}(\overline{z}_j)$ при фиксированном значении одного из аргументов. Таким образом, выполнение условия теоремы 2 приводит к выполнению условия леммы 1. В лемме 1 сформулировано необходимое и достаточное условие существования предельного распределения для последовательности $\{(\Gamma_i, \kappa_i); i \geq 0\}$. Таким образом, достаточность доказана.

Необходимость. Пусть начальное распределение векторной марковской последовательности $\{(\Gamma_i, \kappa_i); i \geq 0\}$ при $z_1,\ z_2 > 1$ удовлетворяет условию $W_0(z) < \infty$ и предельное распределение последовательности $\{(\Gamma_i, \kappa_i); i \geq 0\}$ существует. Тогда имеет место лемма 1 и функции $W_{6i}(\overline{z}_j)$ при $i \geq 0,\ j = 1, 2$, ограничены равномерно по i в некоторой правой полуокрестности точки $z_j = 1$. Согласно интегральной формуле Коши производные функций $W_{6i}(\overline{z}_j)$, $i \geq 0$, $j = 1, 2$, равномерно ограничены по i. Так как

$$\frac{\partial}{\partial z_j} W_{6i}(z)|_{z=\overline{1}} = \frac{d}{dz_j} W_{6i}(\overline{z}_j)|_{z_j=1},\ i \geq 0,\ j = 1, 2,$$

то по теореме о приращении многомерной функции имеем:

$$W_{6i}(z) = 1 + \frac{d}{dz_1} W_{6i}(\overline{z}_1)|_{z_1=1}(z_1 - 1) +$$
$$+ \frac{d}{dz_2} W_{6i}(\overline{z}_2)|_{z_2=1}(z_2 - 1) + o(z_1 - 1) + o(z_2 - 1),\ i \geq 0.$$

Отсюда немедленно следует, что функции $W_{6i}(z)$ ограничены равномерно по i в некоторой окрестности точки $(1, 1)$, что и требовалось доказать. Таким образом, теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Федоткин М. А., Федоткин А. М., Кудрявцев Е. В.* Динамические модели неоднородного потока транспорта на магистралях. Автоматика и телемеханика. 2020, № 8, с. 149–164.
2. *Kudryavtsev E. V., Fedotkin M. A.* Analysis of a Discrete Model of an Adaptive Control System for Conflicting Nonhomogeneous Flows. Moscow University Computational Mathematics and Cybernetics, 2019, Vol. 43, No. 1, pp. 17—24.
3. *Федоткин М. А., Кудрявцев Е. В.* Предельные свойства системы адаптивного управления конфликтными потоками неоднородных требований. Материалы Международной научной конференции «Распределенные компьютерные и телекоммуникационные сети: управление, вычисление, связь (DCCN-15)» Москва, 2015, с. 233–240.
4. *Кудрявцев Е. В., Федоткин М. А.* Исследование математической модели адаптивного управления конфликтными потоками неоднородных требований. Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика, 2019, № 1, с. 23–37.