Название доклада: Ветвящееся случайное блуждание в случайной среде с гумбелевским потенциалом.

Авторы: Куценко Владимир Александрович (докладчик), Яровая Елена Борисовна.

Рассматривается ветвящееся случайное блуждание (ВСБ) с непрерывным временем на решетке $\mathbb{Z}^d$, $d \in \mathbb{N}$. Пусть в каждом узле решетки $x \in \mathbb{Z}^d$ определен процесс рождения и гибели частиц. Предположим, что частица может делиться надвое или гибнуть. Соответствующие интенсивности заданы неотрицательными случайными величинами $\xi^+(x) = \xi^+(x,\omega)$ и $\xi^-(x) = \xi^-(x,\omega)$, определенными на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Математическое ожидание относительно меры $\mathbb{P}$ обозначим угловыми скобками $\langle\cdot\rangle$. Случайной средой назовем совокупность пар случайных величин $(\xi^+(x), \xi^-(x))$, пары пространственно независимы и одинаково распределены. *Случайный потенциал* в каждой точке $x \in \mathbb{Z}^d$ определим как $V(x) = V(x,\omega) = \xi^+(x) - \xi^-(x)$. Реализацию среды при фиксированном $\omega \in \Omega$ назовем "замороженной". Как в [2] блуждание частиц по решетке описывается простым симметричным случайным блужданием, при котором частица с равной интенсивностью перемещается в одну из соседних точек решетки. Эволюция частиц происходит независимо друга от друга и от всей предыстории.

Модель ВСБ. В момент времени $t = 0$ на решетке находится ровно одна частица в точке $x \in \mathbb{Z}^d$, которая за время $[0,h)$, при $h \to 0$, может: прыгнуть в соседнюю точку y с вероятностью $\frac{\varkappa}{2d}h + o(h)$, произвести одного потомка с вероятностью $\xi^+(x)h + o(h)$; умереть с вероятностью $\xi^-(x)h + o(h)$, или, наконец, выжить без изменений с вероятностью $1 - \varkappa h - (\xi^+(x) + \xi^-(x))h + o(h)$. Состояние системы частиц на $\mathbb{Z}^d$ описывается числом частиц $\mu_{t,\omega}(y)$ в момент времени t в точке $y \in \mathbb{Z}^d$, а также общим числом частиц $\mu_{t,\omega} := \sum_{y\in\mathbb{Z}^d} \mu_{t,\omega}(y)$ на $\mathbb{Z}^d$ при начальных условиях $\mu_{0,\omega}(y) = \delta_y(x)$ и $\mu_{0,\omega} = 1$, соответственно. *"Замороженные"* (quenched) моменты порядка n, см. [2, 3], являются случайными и определяются как $m_n(t,x,y) := m_n(t,x,y,\omega) = \mathbb{E}_x\mu^n_{t,\omega}(y)\,; m_n(t,x) := m_1(t,x,\omega) = \mathbb{E}_x\mu^n_{t,\omega}$. Здесь ω относится к фиксированной («замороженной») реализации случайной среды, а x есть положение начальной частицы при $t=0$. *"Отожжженые"* (annealed) моменты порядка $p \geq 1$ определяются как $\langle m^p_n(t,x,y)\rangle$ и $\langle m^p_n(t,x)\rangle$, соответственно.

Теорема 1. *Пусть* $\ln P(V(0) > z) \sim e^{-z}$, $z \to \infty$, *тогда в ВСБ для* $\langle m^p_n(t,x,y)\rangle$ *и* $\langle m^p_n(t,x)\rangle$ *при* $p \geq 1$ *и каждых* $x \in \mathbb{Z}^d$ *и* $y \in \mathbb{Z}^d$, $d \in \mathbb{N}$, *имеем*

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\ln \langle m^p_n\rangle}{pn\,t\ln t} = 1.$$

Доказательство теоремы для $\langle m_1\rangle$ с двумя типами начальных условий $u_0(x) = m_1(0,x,y) = \delta_y(x)$ или $u_0(x) = m_1(0,x) = 1$ основано на решении задачи Коши

$$\begin{aligned} &\frac{\partial m_1}{\partial t} = \varkappa\Delta m_1 + V(x)m_1, \quad (t,x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{Z}^d \\ &m_1 = u_0(x), \quad x \in \mathbb{Z}^d, \end{aligned} \tag{1}$$

где $\varkappa > 0$ и оператор $\varkappa\Delta : l^q(\mathbb{Z}^d) \to l^q(\mathbb{Z}^d)$, $1 \leq q \leq \infty$, является решетчатым лапласианом [2, 3]. Решение задачи Коши (1) может быть представлено [1, 2, 3] по формуле Фенмана-Каца. При $u_0(x) = 1$ оно примет вид

$$u(t,x,\omega) = \mathbb{E}\left[\exp\left\{\int_0^t V\left(x_s,\omega\right)\mathrm{d}s\right\}\right], \tag{2}$$

где x_s — случайное блуждание с генератором $\varkappa\Delta$, а математическое блуждание $\mathbb{E}_x$ берется относительно траекторий случайного блуждания при условии его старта в точке x. Подходы к оценке этого представления предложены в [1], в которой сформулированы основные качественные результаты о поведении m^p_1 и $\langle m^p_1\rangle$, $p \geq 1$. В [2] были даны точные асимптотики для m^p_n и $\langle m^p_n\rangle$, $p \geq 1$, $n \geq 1$, для случайного потенциала $V(0)$ с вейбулловским хвостом распределения. Наконец, для неоднородной случайной среды результаты были обобщены в [3]. Ряд алгоритмов численного моделирования для случайных сред приведен в [4].

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект 20-01-00487.

Список литературы

[1] *J.Gärtner, S. Molchanov.* Parabolic problems for the Anderson model // Commun. Math. Phys. — 1990. — №132. — P. 613–655.

[2] *S. Albeverio, L. Bogachev, S. Molchanov, E. Yarovaya* Annealed moment Lyapunov exponents for a branching random walk in a homogeneous random branching environment // Universität Bonn. SFB 256. Nichtlineare Partielle Differentialgleichungen . — 2000

[3] *E. Yarovaya* Symmetric Branching Walks in Homogeneous and Non-homogeneous Random Environments // Communications in Statistics - Simulation and Computation. — 2012. — №7. — P. 1232–1249

[4] *V. Kutsenko, E. Yarovaya* Symmetric Branching Random Walks in Random Media: Comparing Theoretical and Numerical Results // Stochastic Models — 2022. — P. 1–20.