

О некоторых мартингальных конструкциях для ПСИ-процессов

А.В. Люлинцев

(Россия, Санкт-Петербург; СПбГУ, Матмех)

Пусть $(\xi) = \xi_0, \xi_1, \dots$ – последовательность случайных величин, $\Pi_\lambda(t)$ – пуассоновский процесс с интенсивностью $\lambda > 0$ и временным параметром $t \in \mathbb{R}_+$. Последовательность (ξ) и Π_λ предполагаются независимыми.

Случайный процесс

$$\psi_\lambda(t) := \xi_{\Pi_\lambda(t)}, \quad t \geq 0, \quad (1)$$

называется *ПСИ-процессом*, или *процессом пуассоновского случайного индекса*.

В случае, когда последовательность (ξ) марковская, процесс пуассоновского случайного индекса является процессом псевдопуассоновского типа (см. [4]). Изучены свойства ПСИ-процессов со случайной интенсивностью (см. [2]), спектральные свойства ПСИ-процессов со специальной рандомизацией времени (см. [5]) и некоторые локальные асимптотические свойства последовательностей ПСИ-процессов (см. [3]).

В данной работе рассматривается *интегрированный ПСИ-процесс*:

$$\Psi_\lambda(t) := \int_0^t \psi_\lambda(s) ds, \quad t \geq 0. \quad (2)$$

На основании предыдущих результатов (см. [1], [2]) изучены основные свойства интегрированного ПСИ-процесса, в том числе вычислены главные моментные характеристики. В работе [1] были рассмотрены свойства самоподобия для интегрированного ПСИ-процесса со случайной интенсивностью.

Далее, (ξ) – последовательность независимых одинаково распределённых случайных величин. Вводятся фильтрации, естественно порождённые ПСИ-процессом и интегрированным ПСИ-процессом. ПСИ-процесс является марковским процессом относительно фильтрации, порождённой $\mathcal{F}_t^\psi = \{\sigma(\psi_\lambda(s))\}_{s \leq t}$, а интегрированный ПСИ-процесс относительно фильтрации, порождённой $\mathcal{F}_t^\Psi = \{\sigma(\Psi_\lambda(s))\}_{s \leq t}$, не является марковским.

Рассмотрим двумерный процесс $(\psi_\lambda(t), \Psi_\lambda(t))$ (марковская пара) относительно фильтрации, порождённой $\mathcal{F}_t^{\psi, \Psi} = \{\sigma(\psi_\lambda(s), \Psi_\lambda(s))\}_{s \leq t}$. Данный процесс является марковским относительно введённой фильтрации $\{\mathcal{F}_t^{\psi, \Psi}\}_{t \geq 0}$.

Поставим задачу: построить компенсатор для интегрированного ПСИ-процесса, чтобы относительно естественной фильтрации $\{\mathcal{F}_t^{\psi, \Psi}\}_{t \geq 0}$ скомпенсированный процесс уже являлся мартингалом. Ответ получен, результат сформулирован в теореме ниже.

Теорема 1. Пусть (ξ) – последовательность независимых одинаково распределённых случайных величин, $\mathbb{E}\xi_0 = 0$. Пусть фильтрация \mathbb{F} порождена $\mathcal{F}_t^{\psi, \Psi} = \{\sigma(\psi_\lambda(s), \Psi_\lambda(s))\}_{s \leq t}$. Тогда процесс $\lambda\Psi_\lambda(t) + \psi_\lambda(t)$ при $t \geq 0$ является мартингалом относительно \mathbb{F} : в силу марковости для $s \leq t$

$$\mathbb{E}\{\lambda\Psi_\lambda(t) + \psi_\lambda(t) \mid \psi_\lambda(s), \Psi_\lambda(s)\} = \lambda\Psi_\lambda(s) + \psi_\lambda(s). \quad (5)$$

Благодарности: Работа поддержана грантом РФФИ 20-01-00646 (А).

Литература:

- [1] *Rusakov O., Yakubovich Y., Laskin M.* Self-Similarity for Information Flows With a Random Load Free on Distribution: the Long Memory Case. 2018 2nd European Conference on Electrical Engineering and Computer Science (EECS). P. 183-189.
- [2] *Русаков О.В.* Псевдо-пуассоновские процессы со стохастической интенсивностью и класс процессов, обобщающих процесс Орнштейна-Уленбека // Вестник СПбГУ. Математика. Механика. Астрономия. 2017. Т.4(62). Вып. 2. С. 247-257.
- [3] *Русаков О.В., Якубович Ю.В., Баев Б.А.* О некоторых локальных асимптотических свойствах последовательностей со случайным индексом. // Вестник СПбГУ. Математика. Механика. Астрономия. 2020. Т.7(65). Вып. 3. С. 453-468.
- [4] *Феллер В.* Введение в теорию вероятностей и её приложения. Т. I, II. М.: Мир, 1984.
- [5] *Якубович Ю.В., Русаков О.В.* О спектральных свойствах стационарных случайных процессов, связанных специальной рандомизацией времени // Записки научных семинаров ПО-МИ. Том 501. 2021. С. 315-334.