Сохранение энергии при случайном локальном воздействии на большую систему

Меликян М.В.
Тьютор
Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова,
Механико-математический факультет, Кафедра теории вероятностей,
Москва, Россия
E-mail: mv.melikian@gmail.com

Рассматривается конечная система точечных частиц на вещественной прямой $\mathbb{R}$ с координатами $\{x_k(t)\}_{k=1}^N$ и скоростями $\{v_k(t)\}_{k=1}^N$. Массы всех частиц полагаются равными единице. Обозначим $q_k(t) = x_k - kd, \quad p_k(t) = \dot{q}_k(t) = v_k(t)$, где параметр $d > 0$. Зададим полную энергию системы (гамильтониан) формулой:

$$H(q,p) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N} p_k^2 + \frac{1}{2}\sum_{k,j=1}^{N} a(k-j)q_k q_j - q_n f(t),$$

где $f(t)$ — внешнее воздействие, а функция $a(k)$ удовлетворяет двум условиям:

1. симметрия: $a(k) = a(-k)$ (т.е. система гамильтонова);
2. матрица V положительно определена, где $V_{k,j} = a(k-j) = a(j-k)$.

Ввиду положительной определенности можем обозначить собственные значения матрицы V через $s_k = \nu_k^2, k = 1, ..., N$, причем все ν_k будем считать положительными. Соответствующую им ортонормированную систему собственных векторов обозначим через $\{u_k, k = 1, ..., N\}$.

Заметим, что положением равновесия системы в отсутствие внешнего воздействия (состояние, где достигается минимум энергии) будет

$$x_k = kd, \quad v_k = 0, \quad k = 1, ..., N.$$

Это означает, что если начальные условия находятся в этом положении, то частицы не будут двигаться, т.е. будем иметь $x_k(t) = kd,\ v_k(t) = 0$ для всех $t \geqslant 0$.

Мы будем рассматривать нулевые начальные условия

$$q_k(0) = 0,\ p_k(0) = 0,\ k = 1, ..., N. \tag{1}$$

Таким образом, движение системы описывается следующей системой ОДУ:

$$\ddot{q}_j = -\sum_k a(k-j)q_k + f(t)\delta_{j,n},\ j = 1, ..., N,$$

где $f(t)$ – внешняя сила, действующая на частицу с номером n, $\delta_{j,n}$ – символ Кронекера. Перепишем в гамильтоновом виде:

$$\begin{cases} \dot{q_j} = p_j, \\ \dot{p_j} = -\sum_k a(k-j)q_k + f(t)\delta_{j,n}. \end{cases} \tag{2}$$

Пусть $f(t)$ – внешняя сила, действующая на частицу с номером n, – стационарный в широком смысле центрированный случайный процесс с непрерывной ковариационной функцией $B(s)$ и спектральной мерой $\mu(dx)$.

Будем говорить, что последовательности случайных процессов $\{q_k(t)\}_k, \{p_k(t)\}_k$ решают систему уравнений (2), если они непрерывно дифференцируемы в среднеквадратичном и при их подстановке правая и левая часть равны по соответствующей мере. Начальные условия, лежащие в соответствующем гильбертовом пространстве, гарантируют существование и единственность решений уравнения, принадлежащему этому пространству при каждом t.

Введем вектор $\psi(t) = \begin{pmatrix} q(t) \\ p(t) \end{pmatrix}$ и обозначим:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & E \\ -V & 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда система перепишется в виде:

$$\dot{\psi} = A\psi + f(t)g,\ g = (0, e_n)^T,\ e_n(j) = \delta_{j,n}. \tag{3}$$

Теорема 1. *Для любого $\psi \in \mathbb{R}^{2N}$ существует и единственно (п.н.) решение $\psi(t)$ системы (3) с начальным условием ψ.*

Доказательство. Очевидно следует из существования и единственности решения неоднородной линейной системы дифференциальных уравнений первого порядка, см., например, [1].

Теорема 2. *Пусть мера μ такова, что ковариационную функцию рассматриваемого случайного процесса можно представить в виде $B(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{itx} b(x)dx$. Тогда*

1. *если носитель $b(x)$ не пересекается с множеством $\{\nu_k, k = 1, ..., N\}$, то средняя энергия всей системы будет ограничена по времени;*

2. *если для всех j, таких что ν_j лежит в $supp\, b(x)$, $(u_j, e_n)^2 = 0$, то вновь имеет место ограниченность по времени средней энергии;*

3. *если есть точка спектра ν_j, лежащая в $supp\, b(x)$, такая что $(u_j, e_n)^2 \neq 0$, то*

3.1. *если $\nu_j = 0$ и выполнено*

$$b(0) = b'(0) = 0, \tag{4}$$

то средняя энергия всей системы будет ограничена по времени;

3.2. *иначе (т.е. для тех индексов $j \in \{1, ..., N\}$, для которых либо $\nu_j \neq 0$, либо $\nu_j = 0$, но не выполнено (4)) средняя энергия будет расти по времени, причем существует положительная постоянная C, такая что $E(H(t)) \sim Ct^2$.*

Список литературы

1) Филиппов А.Ф., Введение в теорию дифференциальных уравнений // КомКнига, Москва, 2007.
2) Лыков А.А., Малышев В.А., Меликян М.В. Резонанс в многокомпонентных линейных системах // Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика. 2021. № 3. с. 74-79.
3) Lykov A., Malyshev V., Melikian M., Zamyatin A., Resonances in Large Finite Particle Systems // Springer Proceedings in Mathematics Statistics, серия Shiryaev A.N., Samouylov K.E., Kozyrev D.V. (eds) Recent Developments in Stochastic Methods and Applications. ICSM-5 2020, издательство Springer International Publishing AG (Cham, Switzerland), том 371, 2021, pp. 120-130.
4) Lykov A.A., Malyshev V.A. Harmonic Chain with Weak Dissipation // Markov Processes and Related Fields 18. № 4. 2012. pp. 721-729.