ОБ УРАВНЕНИИ КОРДЕВЕГА – ДЕ ФРИЗА С ШУМОМ В ДИСПЕРСИИ И НЕЛЕЙНОМ ЧЛЕНЕ

Д.А. Сучкова
dil9ara@rambler.ru

Введём стохастическое уравнение Кордевега – де Фриза в форме Стратоновича:

$$d_t u + \alpha u_x dt + \beta u u_x * dW(t) + \gamma u_{xxx} * dW(t) = 0, \qquad (1)$$

которое формально можно записать в виде

$$u_t + \alpha u_x + (\beta u u_x + \gamma u_{xxx}) W'(t) = 0, \qquad (2)$$

где $\alpha, \beta, \gamma > 0$, а $u(x, t, W(t)), u(x, 0, 0) = u_0, (x, t) \in \mathbf{R} \times [\mathbf{0}, \mathbf{T}]$ — случайный процесс, описывающий распространение длинных волн, $W(t), W(0) = 0$ — стандартный вещественнозначный винеровский процесс, который действует на нелинейный и дисперсионный члены уравнения. Уравнение Кордевега – де Фриза используется как приближение для описания однонаправленного распространения волн с малой амплитудой и большой длиной в нелинейных дисперсивных системах. В физическом смысле шум, накладываемый на нелинейный член, определяет влияние факторов окружающий среды на поднятие волны, а шум, накладываемый на дисперсионный член, определяет случайную природу рессеивания волны, что являтся более адекватной моделью конкретных физических явлений, которые носят стохастический характер.

Ранее стохастическое уравнение Кордевега – де Фриза было исследовано в статье A de Bouard, A Debussche [1] в 1998 году. Авторы рассмотрели КдФ со случайным членом типа белого шума в правой части уравнения. Это может быть модель водяных волн на жидкости, находящейся под случайным давлением. В статье доказано существование и единственность решений в $H^1(R)$ в случае аддитивного шума и существование мартингальных решений в $L^2(R)$ в случае мультипликативного шума.

Затем Debussche A. [2] численно исследовал влияние однородного шума на эволюцию решений уравнения Кордевега де Фриза методом конечных элементов и наименьших квадратов. Численные эксперименты проводились для различных значений амплитуды шума. Было замечено, что в распространение ион-акустических солитонов в плазме должен быть добавлен член с пространственно-временным шумом для приближения к экспериментальным данным.

Однако в этих статьях исследовался лишь возмущающий член в виде шума в правой части уравнения. В то время как в данной работе предлагается рассмотреть шум, накладываемый на нелинейный член, который определяет влияние факторов окружающий среды на поднятие волны, и шум, накладываемый на дисперсионный член, который определяет случайную природу рессеивания волны.

Для удобства разобьём рассуждение на шаги:

Шаг 1. Цель данного шага — приведение уравнения (1) к цепочке детерминированных уравнений. Распишем стохастические дифференциалы в форме Стратоновича:

$$d_t u = u_t dt + u_v * dW(t),$$

где $u(x,t,v)$ — детерминированная функция трех переменных, имеющая непрерывные производные третьего порядка. Тогда уравнение (1) перепишется в виде дифференциального уравнения в полных дифференциалах:

$$u_t dt + u_v * dW(t) + \alpha u_x dt + \beta u u_x * dW(t) + \gamma u_{xxx} * dW(t) = 0, \tag{3}$$

где $\alpha, \beta, \gamma > 0$, а $u(x,t,W(t)), u(x,0,0) = u_0, (x,t) \in \mathbf{R} \times [\mathbf{0}, \mathbf{T}]$ — случайный процесс, описывающий распространение длинных волн, $W(t), W(0) = 0$ — стандартный вещественнозначный винеровский процесс, который действует на нелинейный и дисперсионный члены уравнения. Воспользуемся техникой сведения стохастических дифференциальных уравнений (СДУ) Ито в форме Стратоновича к цепочке дифференциальных уравнений [3],[4], подробно описанной в [4] в части исследования потраекторных аналогов одномерных стохастических дифференциальных уравнений с симметричным интегралом, условий их существования и единственности.
Сгруппируем слагаемые:

$$(u_t + \alpha u_x)dt + (u_v + \beta u u_x + \gamma u_{xxx}) * dW(t) = 0. \tag{4}$$

Откуда следует следующая цепочка уравнений:

$$u_t + \alpha u_x = 0, \tag{5}$$

$$u_v + \beta u u_x + \gamma u_{xxx} = 0. \tag{6}$$

Стоит отметить, что полученные уравнения являются детерминированными, решением уравнений является функция трех переменных $u(x,t,v)$, при $v = W(t)$. Заметим, что первое уравнение (5) из цепочки — линейное однородное уравнение в частных производных первого порядка — уравнение переноса на переменные t и x, где v выступает в роли параметра, а второе уравнение (6) — классическое нелинейное детерминированное уравнение Кордевега – де Фриза на переменные v и x, где t выступает в роли параметра.

Шаг 2. Общее решение линейного однородного уравнения (5) в частных производных первого порядка на переменные t и x, где v выступает в роли параметра, представляется в виде $u(x,t,v) = \phi(x - \alpha t, v)$, где решение $u(x,t,v)$ остается постоянным вдоль каждой из характеристик, а ϕ — произвольная функция. Отсюда следует единственность решения с точностью до функции ϕ, которая затем определяется частным решением, показанным ниже.

Рассмотрим второе уравнение цепочки (6) — классическое нелинейное детерминированное уравнение Кордевега – де Фриза на переменные v и x, где t выступает в роли параметра. Пусть $\overline{u}(x,t,v)$ — частное решение этого уравнения, удовлетворяющее начальным условиям с учетом условия $v = W(t)$. Тогда решение $\overline{u}(x,t,v)$ существует и единственно в силу теоремы для детерминированного нелинейного уравнения Кордевега – де Фриза.

Шаг 3. Подставим общее решение уравнение (5) во второе уравнение цепочки (6), получаем следующее уравнение:

$$\phi_v + \beta \phi \phi_y + \gamma \phi_{yyy} = 0, \tag{7}$$

где $y = x - \alpha t$. Это есть не что иное, как классическое нелинейное детерминированное уравнение Кордевега – де Фриза на переменные v и y, где t выступает в роли параметра. Таким образом, любое частное решение уравнения (7) представляется в виде $u(x,t,v) = \phi(x - \alpha t, v)$.

Возникает вопрос, как строить решения уравнения (7).

Пусть $\phi(y,t,v)$ — любое частное решение классического уравнения Кордевега – де Фриза (7), где t выступает в роли параметра, тогда $\phi_1(y,t,v) = \phi(y,t,v)$ при $v = W(t), W(t) \geq 0$ и $\phi_2(y,t,v) = \phi(y,t,v)$ при $v = W(t), W(t) < 0$. Поэтому решение цепочки (5), (6), а следовательно уравнения (7) и СДУ (1) представляется в виде

$$u(x,t,W(t)) = \phi_1(x-\alpha t, W(t)) \cdot \mathbf{1}(W(t) \geq 0) + \phi_2(x - \alpha t, W(t)) \cdot \mathbf{1}(W(t) < 0).$$

Шаг 4. Решение уравнения (1) свелось к решению уравнений (5), (6), (7) решение которых существует. Таким образом, метод построения решений для СДУ Кордевега – де Фриза (1), состоящий из шагов 1-3, является доказательством следующей теоремы существования решений:

Теорема. *Пусть $\phi(y,t,v)$ — любое частное решение классического уравнения Кордевега – де Фриза (7), тогда решение стохастического уравнения длинной волны Кордевега – де Фриза с шумом в дисперсии и нелиейном члене (1) существует и единственно в классе функций, являющемся пересечением двух классов: класса функций, для которых определено единственное решение линейного однородного уравнения в частных производных первого порядка (5) и класса функций, для которых определено единственное решение нелинейного детерминированного уравнения Кордевега – де Фриза (6). Кроме того, решение уравнения (1) однозначно находится по полученному в шагах 1-3 методу.*

Следствие. *Существенно, что в качестве случайной функции можно брать не только винеровский процесс, но и произвольную непрерывную с вероятностью 1 случайную функцию (реализацию случайного процесса), которая имеет неограниченную вариацию.*

Таким образом, разработан аналитический метод решения и доказательство теоремы существования и единственности решения задачи Коши для СДУ Кордевега–де Фриза с шумом в дисперсии и нелиейном члене.

Моделирование уравнения Кордевега – де Фриза с шумом в нелинейном и дисперсионном члене сводится к классическому детерминированному уравнению Кордевега – де Фриза, что существенно облегчает моделирование СДУ КдФ. А частные решения детерминированного КдФ можно использовать для построения решений стохастического КдФ.

Литература

1. *A de Bouard, A Debussche* On the Stochastic Korteweg–de Vries Equation // Journal of Functional Analysis, Volume 154, Issue 1, 1 April 1998, Pages 215-251.

2. *Debussche A.* Numerical simulation of the stochastic Kordeweg-de Vries equation/ A. Debussche, J. Printems //Physica D 134. – 1999. – 200-226.

3. *Насыров Ф.С.* Локальные времена, симметричные интегралы и стохастический анализ. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2011. — 212 с.

4. *Насыров Ф.С., Исмагилов Н.С., Абдуллин М.А.* Одномерные стохастические дифференциальные уравнения: потраекторный подход. — Уфимский математический журнал. Том 5. №4 (2013).С. 3-16.