Алгоритм численного моделирования электронной плотности стохастически конвектирующей высокоширотной ионосферы

G.A. Vlaskov, A.M. Mozhaev

Don State Technical University, Rostov-on-Don, Russia

Для расчета объемного распределения ионосферной плазмы в верхней полярной ионосфере необходимо рассмотреть систему уравнений неразрывности вида

$$\frac{\partial N_e}{\partial t} + (\vec{V}\nabla)N_e + \nabla(N_e \vec{V}_{\|}) = q_i - L_i - N_e \nabla \vec{V} \qquad (1)$$

$(i = 1,2,3,.......)$

где N_i – плотность ионов i-го сорта;

$\vec{V}$ - скорость поперечного по отношению к магнитному полю переноса плазмы, задаваемая моделью конвекции;

$\vec{V}_{\|}$ - продольная скорость движения ионов;

q_i – скорость образования ионов i-сорта;

L_i – скорость их рекомбинации.

Все входящие в уравнение (1) переменные являются в общем случае функциями времени и пространства. На высотах главного максимума $N_e (\approx 300\,км)$ в случае не очень сильных электрических полей (E<50 mV/м) преобладает ион 0^+ . Пренебрегая на рассматриваемой высоте продольными движениями электронов $\vec{V}$ и обжатием плазмы, получим:

$$\frac{\partial N_e}{\partial t} + \vec{V}\nabla N_e = q - \beta N_e \qquad (2)$$

где q –функция скорости ионообразования, β – линейный коэффициент рекомбинации.

Это уравнение представляет собой линейное уравнение первого порядка в частных производных, записанное в пространственных координатах (θ,λ) на сфере радиусом R_i . При заданных функциях $\vec{V}$, q, коэффициенте рекомбинации β оно позволяет получить горизонтальное распределение электронной плотности N_e. Начальным условием задачи предполагается некоторая известная функция:

$$N_e(\theta,\lambda,t)/_{t=t_0} = N_0(\theta,\lambda) \qquad (3)$$

Чтобы решить задачу, удобно воспользоваться лагранжевым подходом, который наряду с обычным (эйлеровым) применяется для описания движения сплошной среды и принят для описания физических процессов в F-области ионосферы.

Источники и механизмы появления нерегулярных магнитных полей в магнитосфере связывают с возмущением в солнечном ветре и магнитосферными суббурями, с развитием разнообразных плазменных неустойчивостей, приводящих к нерегулярной поляризации авроральной плазмы, с появлением полей поляризации в магнитосфере за счет появления нерегулярной ионизации высыпающимися электронами и т. д. Предполагаем, что такие поля существуют и порождают случайное поле скоростей конвекции.

Естественно полагать, что скорость конвекции равна:

$$\vec{V} + \overrightarrow{V_{st}} \qquad (4)$$

гдеV – скорость регулярного дрейфа,

$\overrightarrow{V_{st}}$ – случайная функция, описывающая скорость стохастического движения плазмы.

Пусть $\langle\overrightarrow{V_{st}}\rangle = 0$ (здесь и всюду угловые скобки обозначают математическое ожидание).

$$div\,\overrightarrow{V_{st}} = 0$$

Для построения модели конвекции, учитывающей флуктуации электрического поля используется датчик случайных чисел. Нерегулярное магнитное поле моделируется с помощью датчика случайных независимых равномерно распределенных чисел. В авроральной области $\theta_1 < \theta < \theta_2$ наблюдаются флуктуации конвекции с амплитудой, равной 25 мV/м и 5 мV/м в полярной шапке $\langle\theta < \theta_1\rangle$.

Рассмотрим подробнее случайную составляющую конвекции. Будем полагать, что стохастический перенос является стационарной однородной и изотропной случайной функцией. В случае, когда выполняются условия:

$T \gg \tau$ и $\langle \xi^2(\tau) \rangle \ll l^2$ (5)

где τ – время корреляции случайного переноса $\overrightarrow{V_{st}}$,

l – пространственный радиус корреляции случайного поля $\overrightarrow{V_{st}}$,

$\langle \xi^2(\tau) \rangle$ – средний квадрат стохастического смещения частиц (магнитных силовых трубок) за время τ,

T – характерное время изменения параметров задачи.

Таким образом случайные смещения могут быть описаны стохастическим дифференциалом вида

$d\xi = Vdt + \sigma d\omega(t)$ (6)

где$\delta d\omega(t)$ – смещение, обусловленное стохастическим переносом,

σ – параметр, характеризующий интенсивность флуктуационного движения,

$\omega(t)$ – винеровский процесс.

Данная формула описывает горизонтальный диффузионный перенос совокупности частиц, и $\sigma^2/2$ является при этом коэффициентом диффузии и имеет соответственно размерность M^2/c. Величина этого коэффициента в таких физических процессах, как правило, может быть получена только экспериментальным путем. Произведем приблизительную оценку параметров. Средний квадрат смещения $\langle \xi^2 \rangle$ растет со временем для винеровского процесса по формуле $\langle \xi^2 \rangle = \sigma^2 t$. Заменим непрерывный винеровский процесс соответствующим дискретным марковским процессом случайных блужданий, введя при этом эффективную среднюю длину L_0 и среднее время τ_0 свободного пробега частицы. Тогда получим выражение для среднего квадрата смещения за N случайных шагов в виде

$\langle \xi^2 \rangle_N = NL_0^2 = \sigma^2 N \tau_0$

Откуда $\sigma = \frac{L_0}{\sqrt{\tau_0}}$ (7)

Подставляя $\tau_0 = \frac{L_0}{\langle V_{st} \rangle}$ (8)

получим $\sigma = \sqrt{\langle V_{st} \rangle * L_0}$ (9)

Предположим, что флуктуации $\vec{E}$ в авроральной зоне достигают 25 мV/м, а в полярной шапке 5 мV/м. Это дает соответственно $\langle V_{st} \rangle$ = 500 м/с и 100 м/с. Полагая L_0 = 10 км, получим для авроральной зоны σ = 2500 м/с$^{1/2}$, а для полярной шапки 500 м/с$^{1/2}$. Принять такие значения для величин L_0 , $\langle V_{st} \rangle$ позволяет анализ экспериментальных данных о флуктуациях $\vec{E}$.

Будем считать, что стохастическое движение магнитных силовых трубок в плоскости (x, y) можно описать двумерным винеровским процессом в виде броуновских траекторий. Разобьем движение трубок на дискретные временные интервалы Δt. Тогда траекторию движущейся трубки можно заменить ломаной с координатами $\{x_i, y_i\}$, (i= 0,1,2…), вычисляемым по формулам:

$$X_{i+1} = X_i + V_x(X_i, Y_i)\,\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t}\,\xi_i$$
$$Y_{i+1} = Y_i + V_y(X_i, Y_i)\,\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t}\,\eta_i \qquad (10)$$

гдеV_x, V_y – компоненты скорости регулярной конвекции, ξ_i, η_i – независимые нормально распределенные случайные числа (математическое ожидание = 0, дисперсия = 1).

X_i, Y_i – координаты, принадлежащие отрезку $[(X_i, Y_i), (X_{i+1}, Y_{i+1})]$.

X_0, Y_0 – некоторое стартовое положение в начальный момент времени.

Строго говоря, σ является функцией координат и имеет тензорный характер в случае анизотропных флуктуаций поля скоростей. Здесь же для просто ты считаем σ изотропной и постоянной величиной. Данная формула определяется особенностями винеровского процесса.

Как было отмечено, учет стохастической компоненты магнитосферной конвекции предполагает, что магнитные силовые трубки переносящие плазму совершают беспорядочные движения. Очевидно, что при этом изменяется горизонтальное распределение электронной плотности в F-области полярной магнитосферы. В данном случае следует говорить об электронной плотности N_eкак случайном поле (стационарном или нестационарном).

Ставится задача оценить, используя такие представления, пространственные и временные флуктуации электронной плотности. Для этого используется уравнение неразрывности с учетом стохастического характера конвекции и представлении ее скорости в виде $\vec{V} + \overrightarrow{V_{st}}$. Только некоторые весьма сильные упрощения допускают аналитические решения [3].

Рассмотрим уравнение неразрывности в чуть более общем случае. Пусть $\vec{V}$ регулярного переноса – величина неоднородная в пространстве. Решение задачи при этом существенно усложняется. Аналитическое выражение для функции распределения или других вероятностных характеристик не удается найти. Поэтому наиболее действенными остаются численные методы, в частности, метод Монте-Карло, основанный на идее розыгрыша конкретных значений случайных факторов с использованием ЭВМ и датчика псевдослучайных чисел.

Рассмотрим величину $N_e(\vec{r})$ в некоторой точке $\vec{r}$ двумерной горизонтальной области ионосферы. Она зависит от того, что происходило с данной силовой трубкой в прошлом, то есть какое действие оказали процессы ионообразования и рекомбинации. Наличие стохастической компоненты переноса не позволяет однозначно определить, через какие зоны и какой интенсивности функции q проходила траектория этой магнитной силовой трубки. Существенно то, что при этом случайным образом меняется ее скорость и направление движения.

Рассмотрим возможность применения метода Монте-Карло для следующей задачи: необходимо выяснить распределение магнитной плотности в области x > 0, устанавливающееся под действием регулярной и стохастической конвекции. Предполагается, что при $x \leq 0, N_e = n_0 =$ const. Считается возможным пренебречь вертикальным движением плазмы и принять линейный закон рекомбинации с коэффициентом β. В этом случае уравнение неразрывности примет вид

$$\begin{cases} \frac{\Delta N_e}{\Delta t} + (V_x + V_{st}^x)\frac{\Delta N_e}{\Delta x} + \left(V_y + V_{st}^y\right)\frac{\Delta N_e}{\Delta y} + \beta N_e = 0 \\ N_e = n_0 \text{ при } x \leq 0 \end{cases} \qquad (11)$$

где V_x, V_y – проекции скорости регулярной,

V_{st}^x, V_{st}^y – стохастической конвекции на оси x и y.

Решение данного уравнения для (x > 0) имеет вид

$$N_e(X,Y)_t = n_0 \exp\left(-\beta t_{xy}\right) \qquad (12)$$

где t_{xy} – время, затраченное на движение магнитной силовой трубки от стартового положения до точки с координатами x, y.

В различные моменты времени t в точку с этими координатами попадают различные частицы и на их движение затрачивается различное время t_{xy}. Из-за случайного характера движений частиц величины t_{xy} и плотности $N_e(X,Y)$ также является случайными.

Несложно вычислить математическое ожидание и дисперсию $N_e(X,Y)$ приближенно. Разыграв пучок возможных траекторий трубок, приходящих в заданную точку, можно оценить эти величины по формулам математической статистики:

$$\langle N_e \rangle = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} N_e^i(X,Y)$$

$$\Delta N_e^2 = \frac{1}{k-1}\sum_{i=1}^{k}\left[N_e^i(X,Y) - \langle N_e \rangle\right]^2 \qquad (13)$$

где k – количество построенных траекторий,

i – номер конкретной реализации (траектории розыгрыша).

Особая ценность предложенного метода заключается в том, что он легко распространяется на более сложные случаи.

[1] Исаев Н В., Трушкина Е. П., Осипов Н. К. Эмпирические модели электрического поля в высокоширотной ионосфере, - Препринт № 51(936), 1990, Москва, ИЗМИРАН СССР, 40 с.

[2] М. Г. Дёминов, Ионосфера Земли: закономерности и механизмы, *Электромагнитные и плазменные процессы от недр Солнца до недр Земли*, ИЗМИРАН, М., 2015, 295–346.

[3] Yu. E. Gliklikh, G. A. Vlaskov On modelling the convecting polar ionosphere, *Journal of Computational and Engineering Mathematics*, 2019, vol. **6**, no. 1, p. 63-67.

[4] Власков Г.А., Можаев А.М. О моделировании стохастически конвектирующей полярной ионосферы. – в кн.: *Исследование высокоширотной ионосферы*, Апатиты, изд. Кольского филиала АН СССР, 1986, с. 42-45.

[5] Власков Г.А., Можаев А.М. Моделирование стохастически конвектирующей ионосферы (тез. докл. науч. конф.), *Теория вероятностей и ее применения*. - 2017. - Т. **62**, № 4. – С. 806-807