Предельное поведение порядковых статистик на длинах циклов случайных A-подстановок

А.Л. Якымив
Математический институт им. В.А. Стеклова

Рассматривается случайная подстановка τ_n, равномерно распределённая на множестве всех подстановок степени n, длины циклов которых принадлежат фиксированному множеству A (так называемых A-подстановок). Пусть ζ_n - общее число циклов и $\eta_n(1) \leq \eta_n(2) \leq \cdots \leq \eta_n(\zeta_n)$ - вариационный ряд длин циклов подстановки τ_n. Мы будем предполагать, что у множества A существует положительная асимптотическая плотность ϱ во множестве натуральных чисел, т.е.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|k:\ k \in A,\ k \leq n|}{n} = \varrho > 0.$$

Зафиксируем действительное x и положим при $m \in N$ и $t > 0$

$$r = \exp\left(\frac{m}{\varrho} + x\frac{\sqrt{m}}{\varrho}\right), \quad l(t) = \sum_{i\in A, i\leq t} 1/i.$$

Теорема 1 *Предположим, что множество A не находится на решётке с шагом, большим 1, и пусть последовательность $m = m(n) \to \infty$ такова, что*

$$\frac{\varrho \ln n - m}{\sqrt{\ln n}} \to +\infty \quad (n \to \infty).$$

Тогда

$$\mathsf{P}\{\varrho \ln \eta_n(m) \leq m + x\sqrt{m}\}$$
$$= \Phi(z) + \frac{1}{405 l^{3/2}(r)}(10\Phi^{(3)})(z) + \Phi^{(5)}(z)) + O\left(\frac{1}{\ln^2(n)}\right)$$

где

$$z = y - \frac{1}{108\mu}(y^3 - y),$$

$$y = 3\sqrt{\mu}\left(\left(\frac{\nu}{\mu}\right)^{1/3} - \frac{1}{9\mu} - 1\right),\ \mu = m+1,\ \nu = l(r).$$

Здесь $\Phi(\cdot)$ - функция стандартного нормального распределения. Также рассматривается соответствующий решётчатый случай.