В. И. Афанасьев. Слабо надкритический ветвящийся процесс в случайной среде при условии удаленного вырождения[1]

Пусть Δ – пространство вероятностных мер на $\mathbf{N}_0$ с метрикой полной вариации. *Случайная среда* – это последовательность независимых и одинаково распределенных случайных элементов $Q_1, Q_2, \ldots$ со значениями в Δ. Последовательность случайных величин $\{Z_n,\ n \in \mathbf{N}_0\}$ со значениями в $\mathbf{N}_0$ называется *ветвящимся процессом в случайной среде*, если $Z_0 = 1$ и $Z_{n+1} = \sum_{i=1}^{Z_n} \xi_i^{(n)}$ при $n \in \mathbf{N}_0$, где предполагается, что при фиксированной случайной среде случайные величины $\left\{\xi_i^{(n)},\ i \in \mathbf{N}, n \in \mathbf{N}_0\right\}$ независимы, причем при фиксированном $n \in \mathbf{N}_0$ величины $\xi_1^{(n)}, \xi_2^{(n)}, \ldots$ имеют одинаковое распределение Q_{n+1}. Пусть $\varphi_1(\cdot)$ – производящая функция распределения Q_1. Положим $X_1 = \ln \varphi_1'(1)$. Процесс $\{Z_n,\ n \in \mathbf{N}_0\}$ называется *слабо надкритическим*, если $\mathbf{E}X_1 > 0$ и $-\infty < \mathbf{E}X_1 e^{-X_1} < 0$. Введем случайный процесс: $Y_n(t) = Z_{\lfloor nt \rfloor} \exp\left(-S_{\lfloor nt \rfloor}\right)$ при $t \in [0,1)$ и $Y_n(1) = Z_n$. Введем также момент вырождения процесса $\{Z_n,\ n \in \mathbf{N}_0\}$: $T = \min\{n > 0 : Z_n = 0\}$. Положим $\theta(t) = \mathbf{E}\exp(-tX_1)$ и $\gamma = \inf_{t \in [0,1]} \theta(t)$. Пусть символ $\Rightarrow$ означает сходимость конечномерных распределений процессов.

Теорема. *Если процесс $\{Z_n,\ n \in \mathbf{N}_0\}$ является слабо надкритическим и выполнены некоторые дополнительные предположения, то при $n \to \infty$*

$$\mathbf{P}(n < T < +\infty) \sim c_1 \frac{\gamma^n}{n^{3/2}},$$

где $c_1 > 0$ – некоторая постоянная, и

$$\{Y_n(t),\ t \in [0,1] \mid n < T < +\infty\} \Rightarrow \{Y(t),\ t \in [0,1]\},$$

где $\{Y(t),\ t \in [0,1]\}$ – случайный процесс с *неотрицательными постоянными траекториями на $(0,1)$, причем вероятность события $\{Y(t) > 0\}$ положительна при $t \in (0,1)$; величина $Y(1)$ принимает значения из $\mathbf{N}$.*

[1]Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда N 19-11-00111-П, https://rscf.ru/project/19-11-00111/ .