М.В. Бурнашев: О лемме Стейна в общем случае

Институт проблем передачи информации, РАН; burn@iitp.ru

Пусть $\mathbf{P}$, $\mathbf{Q}$ – вероятностные меры на измеримом пространстве $(\mathcal{X}, \mathcal{B})$. Рассмотрим проверку простой гипотезы $\mathcal{H}_0 : \mathbf{x} \sim \mathbf{P}$ против простой альтернативы $\mathcal{H}_1 : \mathbf{x} \sim \mathbf{Q}$ по наблюдению $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$. Пусть для принятия решения используется область $\mathcal{D} \in \mathcal{X}$, такая что $\mathbf{x} \in \mathcal{D} \Rightarrow \mathcal{H}_0$, $\mathbf{x} \notin \mathcal{D} \Rightarrow \mathcal{H}_1$. Для вероятности ошибки первого рода $\alpha(\mathcal{D})$ и второго рода $\beta(\mathcal{D})$ имеем: $\alpha(\mathcal{D}) = \mathbf{P}(\mathbf{x} \notin \mathcal{D}|\mathcal{H}_0)$ и $\beta(\mathcal{D}) = \mathbf{P}(\mathbf{x} \in \mathcal{D}|\mathcal{H}_1)$. При заданной вероятности ошибки первого рода α, $0 < \alpha < 1$, нас интересует минимально возможная вероятность ошибки второго рода $\beta(\alpha) = \inf\limits_{\mathcal{D}:\alpha(\mathcal{D}) \le \alpha} \beta(\mathcal{D})$.

Теорема (обобщение леммы Стейна). *Величина $\beta(\alpha)$, $0 < \alpha < 1$, удовлетворяет границам*

$$\ln \beta(\alpha) \ge -\frac{D(\mathbf{P}||\mathbf{Q}) + h(\alpha)}{1-\alpha}, \qquad h(\alpha) = -\alpha \ln \alpha - (1-\alpha)\ln(1-\alpha), \tag{1}$$

и

$$\ln \beta(\alpha) \le -D(\mathbf{P}||\mathbf{Q}) + \mu_0(\alpha), \tag{2}$$

где $D(\mathbf{P}||\mathbf{Q}) = \mathbf{E}_{\mathbf{P}} \ln \frac{d\mathbf{P}}{d\mathbf{Q}}(\mathbf{x}) \ge 0$ (функция Кульбака-Лейблера) и $\mu_0(\alpha)$ – минимально возможная величина μ_0, удовлетворяющая условию

$$\mathbf{P}_{\mathbf{P}} \left\{ \ln \frac{d\mathbf{P}}{d\mathbf{Q}}(\mathbf{x}) \le D(\mathbf{P}||\mathbf{Q}) - \mu_0 \right\} \le \alpha. \tag{3}$$