Лещенко С.С. (СУНЦ МГУ). **Решение задачи частичного хеджирования через двойственную задачу.**

Фиксируем полное вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$, на котором определены неотрицательная случайная величина H, характеризующая платежное обязательство, и случайная величина V, характеризующая терминальное значение капитала. Обозначим через $\mathcal{Q}$ выпуклый класс всех абсолютно непрерывных относительно $\mathbf{P}$ вероятностных мер. Рассматривается прямая оптимизационная задача

$$\mathbf{SH}(c) := \inf_{V \in \mathbb{B}_1} L((H - cV)^+). \tag{1}$$

Здесь множество $\mathbb{B}_1$ интерпретируется как множество терминальных значений капитала, отвечающих всем стратегиям с начальным капиталом, не превышающим 1, функционал L имеет следующее робастное представление $L(\cdot) = \sup\limits_{Q \in \mathcal{Q}} \{\mathbf{E}_Q [l(\cdot)] - \gamma(Q)\}$. Мы предполагаем, что функция потерь $l : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ из робастного представления удовлетворяет набору условий (a): l строго выпукла, l строго возрастает, $l(0) = 0$. Про штрафную функцию $\gamma(\cdot) : \mathcal{Q} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ известно, что 1) $\inf\limits_{Q \in \mathcal{Q}} \gamma(Q) > -\infty$; 2) γ не равна тождественно ∞; 3) существуют числа $d, s \in \mathbb{R}$, $s > 0$, такие, что $\gamma(Q) \geqslant d + s \left|\left| \frac{dQ}{d\mathbb{P}} \right|\right|_q, \quad Q \in \mathcal{Q}$. Мы рассматриваем следующую двойственную задачу:

$$\mathbf{F}(c) = -\inf_{\alpha,\beta \in L^1_+ \times L^q_+} \left\{ \mathbf{E}\left[-\beta u \left(H, \frac{\alpha}{\beta} \right) \mathbb{I}_{\{\beta > 0\}} \right] + c \sup_{V \in \mathbb{B}_1 \cap L^\infty} \mathbf{E}\left[\alpha V\right] + \gamma^{\min}(\beta.\mathbf{P}) + \delta_{\{\mathbf{E}[\beta]=1\}} \right\}, \tag{2}$$

где $u(h, \lambda) := \inf\limits_{0 \leqslant v \leqslant h} \{l(h - v) + \lambda v\}$, $\beta.\mathbf{P}$ — абсолютно непрерывная относительно меры $\mathbf{P}$ вероятностная мера, соответствующая вероятностной плотности β, $\gamma^{\min}$ — штрафная функция, определяемая формулой [1, (2.7)]. Основной результат, о котором будет рассказано в докладе, формулируется следующим образом.

Теорема. *Пусть штрафная функция $\gamma(\cdot)$ удовлетворяет условиям 1)–3), l удовлетворяет набору условий (a), а также выполняются условия: $l(H) \in L^p$ и $\sup\limits_{m \in \mathcal{D}} \boldsymbol{E}[mH] < \infty$ (здесь $\mathcal{D}$ — это поляра множества $\mathbb{B}_1$). Тогда прямая оптимизационная задача (1) и двойственная оптимизационная задача (2) имеют решения $\widehat{V}$ и $(\widehat{\alpha}, \widehat{\beta})$ и выполняется равенство:*

$$\boldsymbol{SH}(c) = \boldsymbol{F}(c) = \sup_{\lambda > 0} \{\boldsymbol{DH}(\lambda) - \lambda c\},$$

где $\boldsymbol{DH}(\lambda)$ — двойственная задача, сформулированная в [1].

В докладе будет также рассказано о характеризации решения исходной задачи через решение двойственной задачи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Treviño-Aguilar E.* Duality in a problem of static partial hedging under convex constraints // SIAM Journal on Financial Mathematics. 2015. Vol. 6. P. 1152-1170.