

Непрерывные ветвящиеся марковские процессы на \mathbb{Z}_+ : подход с использованием ортогональных многочленов

А.В. Люлинцев

Санкт-Петербургский государственный университет

Рассматривается однородный марковский процесс $X_n(t)$ с непрерывным временем на фазовом пространстве $\mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, \dots\}$, который мы интерпретируем как движение частицы. Процесс предполагается непрерывным в том смысле, что частица не может «перескакивать» через точки \mathbb{Z}_+ , то есть при каждой смене положения частицы ее координата изменяется на единицу. Процесс снабжен механизмом ветвления. Источники ветвления могут находиться в каждой точке \mathbb{Z}_+ . В момент ветвления новые частицы появляются в точке ветвления и дальше начинают эволюционировать независимо друг от друга (и от остальных частиц) по тем же законам, что и начальная частица (подробнее см. [1], [2], [3]). Такому ветвящемуся марковскому процессу соответствует матрица трехдиагональная матрица Якоби H .

Матрице H соответствует семейство многочленов $\{P_n(\lambda)\}_{n=0}^\infty$, которые ортонормированы по вероятностной мере ρ (см. [4],[5]).

Теорема 1. Пусть $X_n(t)$, $X_n(0) = \delta_n$, — процесс ветвящегося случайного блуждания на \mathbb{Z}_+ . Тогда для среднего числа $N_n(t, m)$ частиц в точке $m \in \mathbb{Z}_+$ в момент времени $t \geq 0$ справедливо равенство

$$N_n(t, m) = \int_{\mathbb{R}} e^{t\lambda} P_m(\lambda) P_n(\lambda) \rho(d\lambda).$$

Проведены вычисления для трех моделей ветвящихся случайных блужданий, матрицы которых соответствуют классическим ортогональным многочленам.

1. Гихман И.И., Скороход А.В. Теория случайных процессов, т. II // Изд-во "Наука", Главная редакция физико-математической литературы, 1973, 598-622.

2. Яровая Е.Б. Ветвящиеся случайные блуждания в неоднородной среде // М.: Издательство Центра прикладных исследований при механико-математическом факультете МГУ, 2007. – 104 с. ISBN 978-5-211-05431-8.

3. Смородина Н.В., Яровая Е.Б. Мартингалный метод исследования ветвящихся случайных блужданий // УМН, 77:5(467) (2022), 193–194.

4. Ахиезер Н.И. Классическая проблема моментов и некоторые вопросы анализа, связанные с нею. // Государственное издательство физико-математической литературы, Москва, 1961, 9-79.

5. Сегё Г. Ортогональные многочлены // Государственное издательство физико-математической литературы, Москва, 1962, 420-436.