Э.Л.Пресман (Москва, Россия), И.М.Сонин (Шарлотт, США). Модель управления запасами с ценами, зависящими от цепи Маркова с непрерывным временем

Рассмотрена задача минимизации ожидаемых дисконтированных (с параметром $\rho > 0$) интегральных издержек по закупке и хранению товара на складе, на котором нужно обеспечить исходящий поток товара с единичной интенсивностью. Товар покупается по текущей цене, зависящей от значения цепи Маркова с непрерывным временем, конечным числом состояний и известной матрицей интенсивностей переходов Λ. Координаты вектора P соответствуют ценам товара при различных состояниях марковской цепи и, без ограничения общности считаются убывающими. Считается, что закупки по текущей цене можно производить как крупными партиями, так и непрерывно увеличивая (не уменьшая) количество купленного товара, при этом плата за хранение пропорциональна количеству товара, имеющегося на складе с коэффициентом пропорциональности c. Координаты вектора $V(x)$ задают минимальное значение ожидаемых дисконтированных издержек при начальном состоянии запаса x и заданном начальном состоянии цепи.

Теорема. *Вектор-функция* $V(x)$ *выпукла, а её производная* $U(x) = \dfrac{dV(x)}{dx}$ *является единственным* **непрерывно дифференцируемым** *решением уравнения*

$$\frac{dU(x)}{dx} = \max[b(x), \mathbf{0}], \quad U(0) = -P, \quad \text{где } b(x) = (\Lambda - \rho E)\, U(x) + cI, \tag{1}$$

(*где максимум берется покоординатно,* E *- единичная матрица,* I *-столбец, состоящий из единиц. При этом существует такой вектор* a^**, что* $a^*_1 = 0$*,* $b_i(x) < 0$ *при* $0 \le x < a^*_i$*,* $b_i(x) \ge 0$ *при* $x \ge a^*_i$*, и оптимальной является* a^**-пороговая стратегия закупок, т.е. если цепь находится в состоянии* i*, а уровень запаса равен* x*, то*: *если* $x \le a_i$*, то надо купить товар в количестве* $a_i - x$*, а потом вплоть до следующего скачка цепи надо закупать товар с единичной интенсивностью, чтобы запас на складе был равен пороговому значению* a_i; *если* $x > a_i$*, то проводить закупки не следует вплоть до следующего скачка цепи или момента, когда убывающее значение запаса станет равным* a_i.

Приведен алгоритм последовательного (по возрастанию порогов) решения уравнения (1) и нахождения значений порогов.

У решения этой задачи есть следующие особенности, которые, на наш взгляд, характерны для решения более общих задач управления процессами с интегральным дисконтированным функционалом, зависящим от значения цепи Маркова с непрерывным временем и конечным числом состояний. Во-первых, удобно уравнение оптимальности выписывать в виде выбора оптимального управления до момента первого скачка, т. е. рассмотреть вложенную цепь Маркова. Во-вторых, в такого рода задачах удобно от изучения функции выигрыша перейти к изучению её производной. В-третьих, вместо условия гладкого склеивания (непрерывность производной функции выигрыша, которое возникает в задачах с диффузионными процессами, в рассматриваемых задачах появляется условие дважды гладкого склеивания (непрерывность второй производной). В-четвёртых, при некоторых соотношениях между параметрами, оптимальное управление может оказаться неединственным.