Алгоритмы назначения цен на ресурсы, стимулирующих оптимальное поведение производителей с неизвестными случайными полезностями

Рохлин Д.Б.
Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону

Рассмотрим задачу о об оптимальном распределении m ресурсов между n производителями со случайными функциями полезности:

$$F_t(x) := F(x, \xi_t) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x^{(k)}, \xi_t) \to \max_{x \in S} \tag{1}$$

$$S = \begin{cases} Ax := \sum_{k=1}^{n} A^{(k)} x^{(k)} \le b; \\ 0 \le x^{(k)} \le r^{(k)}, \quad k = 1, \dots, n. \end{cases} \tag{2}$$

Здесь $x^{(k)} \in \mathbb{R}^{d_k}$ — объемы товаров, произведенных k-м предприятием, $A_{ij}^{(k)}$ — количество i-го ресурса, которое требуется для производства единицы j-го товара k-м предприятием, b_i, $i = 1, \dots, m$ — имеющееся количество каждого ресурса, ξ_t — независимые одинаково распределенные случайные величины. Функции f_k предполагаются сильно выпуклыми по первому аргументу.

Теорема 1 *Ускоренный алгоритм двойственного усреднения [1, теорема 5], примененный к двойственной задаче, генерирует последовательность цен* λ_t*, зависящих от лишь от объемов ресурсов* $A^{(k)} \widetilde{x}_t^{(k)}(\lambda_t)$*,*

$$\widetilde{x}^{(k)}(\lambda_t) \in \arg \max_{0 \le x^{(k)} \le r^{(k)}} (f_k(x^{(k)}) - \langle A^{(k)} x^{(k)}, \lambda_t \rangle),$$

запрашиваемых производителями, и такую, что

$$\frac{1}{\alpha_{1:T}} \mathsf{E} \sum_{t=1}^{T} \alpha_t \left[F_t(x_t^*) - F_t(\widetilde{x}_t(\overline{\lambda}_t)) \right] = O(T^{-1/4}), \quad \frac{1}{\alpha_{1:T}} \mathsf{E} \sum_{t=1}^{T} \alpha_t (A \widetilde{x}_t(\overline{\lambda}_t) - b)_i = O(T^{-1/4}),$$

где $\alpha_t = t$*,* $\alpha_{1:T} = \sum_{t=1}^{T} \alpha_t$*,* $\overline{\lambda}_t = \sum_{t=1}^{T} \alpha_t \lambda_t / \alpha_{1:t}$*, и* x_t^* *— оптимальные решения задач (1), (2). В детерминированном случае тот же алгоритм дает оценки порядка* $O(T^{-1})$*.*

ЛИТЕРАТУРА

1. Joulani, P., Raj, A., Gyorgy, A., Szepesvári, C. A simpler approach to accelerated optimization: iterative averaging meets optimism // In *International conference on machine learning*, pp. 4984–4993, 2020.