Сайфутдинова Н.А., Волосатова Т.А. Об одной модификации рандомизированной функции Кобба-Дугласа

Пусть (Ω, F, P) - некоторое вероятностное пространство. Рассмотрим функцию $F(u_1, u_2, ..., u_n) = E\left(Au_1^{\alpha_1}u_2^{\alpha_2}...u_n^{\alpha_n}\right), u_1 > 0, u_2 > 0, ..., u_n > 0$. Будем называть эту функцию модифицированной рандомизированной функцией Кобба-Дугласа.

Пусть$A, \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ являются неотрицательными случайными величинами (п.в.).

Обозначим:$f(u_1, u_2, ..., u_n) = E\left(Au_1^{\alpha_1}u_2^{\alpha_2}...u_n^{\alpha_n}\right);$

$f_i(u_1, u_2, ..., u_n) = E\left(\alpha_i f\left(u_1^{\alpha_1}u_2^{\alpha_2}...u_n^{\alpha_n}\right)\right)dP, i = 1, 2, ..., n;$

$f_{ij}(u_1, u_2, ..., u_n) = E\left(\alpha_i\alpha_j f\left(u_1^{\alpha_1}u_2^{\alpha_2}...u_n^{\alpha_n}\right)\right)dP, i = 1, 2, ..., n.$

Матрица Гессе имеет следующий вид: $(A_n)_{ij} = \begin{cases} \dfrac{1}{u_i^2}f_{ii} - \dfrac{1}{u_i^2}f_i, i = j \\ \dfrac{1}{u_iu_j}f_{ij}, i \neq j \end{cases}$

Для $1 \le k \le n$ обозначим $M_k = |A_k|u_1u_2...u_n$, где $|A_k|$- миноры матрицы Гессе.

Теорема. Если $P(\alpha_1 \ge 0, \alpha_2 \ge 0, ..., \alpha_n \ge 0, \alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n \le 1) = 1$, и, кроме этого, $P(A < +\infty) = 1$, то для всех $k\,(1 \le k \le n)$ и для всех $u_1 > 0, u_2 > 0, ..., u_n > 0$ выполяются неравенства $(-1)^k M_k \le 0$, и, следовательно, функция $F(u_1, u_2, ..., u_n)$ является вогнутой для $u_1 > 0, u_2 > 0, ..., u_n > 0$.