М. С. Тихов (ННГУ им. Н.И. Лобачевского, Нижний Новгород, Россия).
Оценивание распределений по выборкам случайного объема.

Пусть $\mathcal{X}^{(n)} = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ – независимые и одинаково распределенные случайные величины (с.в.) с неизвестной непрерывной функцией распределения (ф.р.) $F(x)$. Распределение статистики Колмогорова (см. [1] , с.134-141) основано на эмпирической ф.р. $F_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} I(X_n < x)$, где $I(X_i < x)$ – индикатор события $(X_i < x)$, по выборке *фиксированного объема* n. В докладе рассматривается задача оценивания ф. р. $F(x)$ и асимптотическое поведение $F_n(x)$ как по *полной*, а так и по *неполной* выборке ***случайного объема*** ν_p. Величина ν_p имеет λ-$\boldsymbol{NB}$ распределение:

$$\mathbf{P}(\nu_p = k) = \frac{m(m+\lambda)\cdot..\cdot(m+\lambda(k-m+1))}{(k-m)!}\,(1-\lambda q)^{\rho} q^{k-m}, \quad k \in \{m, m+1, ...\},$$
$$q = 1-p,\ 0 < p, \lambda < 1,\ \mu = m/\lambda, \quad \text{и} \quad \nu_p \text{ не зависит от } \mathcal{X}^{(n)}.$$

Пусть отрезок $[0,1]$ – носитель этого распределения, $u_i = i/n, i = 0, 1, \ldots, n$ – точки деления интервала $[0,1]$ и $W_i = I(X_i < u_i)$. Требуется также построить оценку для ф. р. $F(x)$ и её квантилей $F^{-1}(\alpha)$, $0 < \alpha < 1$, по выборке $\mathcal{U}^{(n)} = \{(u_i, W_i), i = 0, .., n\}$. Если объем выборки n *фиксирован*, то в качестве оценки $F(x)$ в [2], [3] использовалась ядерная оценка Надарая-Ватсона $\hat{F}_n(x)$ с ядром $K = K(x)$, $\operatorname{supp} K = [-1, 1]$ и $||K||^2 = \int_{-1}^{1} K^2(x)\,dx < \infty$. В этом случае асимптотическое при $n \to \infty$ распределение разности $n^{2/5}(\hat{F}_n(x) - \mathbf{E}(\hat{F}_n(x)))/b(x)$, где $b^2(x) = F(x)(1-F(x))\,||K||^2$, является нормальным $\mathcal{N}(0,1)$. Пусть $K_\mu(x)$ есть функция Макдональда

Теорема 1. *Если $F(x)$ непрерывная функция распределения, тогда*

$$\text{(i)} \quad F_{\nu_p}(x) \xrightarrow[\lambda q \to 1]{p} F(x); \qquad \text{(ii)} \quad \sqrt{1-\lambda q}\cdot\frac{\nu_p\,(F_{\nu_p}(x) - F(x))}{\sqrt{F(x)(1-F(x))},} \xrightarrow[\lambda q\to 1]{d} \zeta_\mu,$$

ζ_μ имеет х. ф. $\quad \varphi_\mu(t) = \left(\dfrac{2}{2+t^2}\right)^{\mu}$, *а величина* $\dfrac{\zeta_\mu}{\sqrt{2}}$ *имеет плотность распределения*

$$f_\mu(x) = \frac{1}{\Gamma(\mu)\sqrt{\pi}}\,\left(\frac{|\,x\,|}{2}\right)^{\mu-1/2} K_{\mu-1/2}(|\,x\,|),\ x \in \mathbf{R}. \qquad (1)$$

Рассмотрено также поведение ядерной оценки $\hat{F}_{\nu_p}(x)$ и её квантилей по выборкам случайного объема ν_p.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Колмогоров А.Н. *Об эмпирическом определении закона распределения* (1933). – В: Теория вероятностей и математическая статистика. – М.: Наука, 1986 – 535 с.
[2] Tikhov M.S. Statistical Estimation based on Interval Censored Data. -– In: *Param. and Semiparam. Models with Appl. to Rel., Surv. Analisys, and Qual. of Life*: Springer-Verlag: Theor.& Meth., **XLIV** (2004), pp. 209-215.
[3] Okumura H., Naito K. Non-parametric kernel regression for multinomial data. – *Journal Multivariate Analysis*, **97** (2006), pp. 2009-2022.