

Оценки сходимости и бета-перемешивания для цепей Маркова и диффузии с переключением

А.Ю.Веретенников*

Пусть X_n – однородная цепь Маркова на конечном фазовом пространстве с неприводимой, аperiodической переходной матрицей Q . Сравниваются следующие характеристики: эргодический коэффициент Маркова - Добрушина $\kappa(Q)$, его аналог за m шагов $\kappa(Q^m)$, спектральная оценка $|\lambda_2(Q^m)|$ [1, Гл. XIII, (96)] (степень m второго собственного числа Q) и спектральные радиусы $r(V)$ & $r(V_m)$ суб-стохастических матриц V & V_m марковского каплинга [2, Раздел 2].

Теорема 1. Для матрицы Q , инвариантной меры μ и для $\mu_n^x := \mathcal{L}(X_n)$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} (\kappa(Q^m))^{1/m} = \lim_{m \rightarrow \infty} (r(V_m))^{1/m} = |\lambda_2(Q)| \text{ \& } \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \|\mu_n^x - \mu\|_{TV} \leq \ln |\lambda_2(Q)|.$$

Для бесконечных фазовых пространств это открытая проблема. Данная эквивалентность важна, так как $\kappa(Q^m) \geq r(V_m) \geq |\lambda_2(Q^m)|$, и в примерах неравенства обычно строгие (ср. [2, Раздел 4]). Аналоги первых двух характеристик κ и r работают и в неоднородных случаях, в отличие от $|\lambda_2(Q)|$. Аналогичные неравномерные оценки сходимости к инвариантному режиму могут быть установлены и в различных некомпактных фазовых пространствах. Естественным развитием данных оценок является коэффициент перемешивания Колмогорова; он будет оценен для диффузии Райта - Фишера и диффузии с переключением.

Список литературы

- [1] Ф.Р.Гантмахер, Теория матриц, изд. 5, М, Физматлит, 2004.
- [2] А.Ю. Веретенников, М.А. Веретенникова, Об улучшенных оценках и условиях сходимости для цепей Маркова, Изв. РАН. Сер. матем., 86:1 (2022), 98-133. doi: 10.4213/im9076

*Институт проблем передачи информации, Москва, Российская Федерация; ayv@iitp.ru. Данная работа поддержана Фондом развития теоретической физики и математики “БАЗИС”.