Стохастический аналог деривационных уравнений Вейнгартена

Д.С. Климентов

29 апреля 2024 г.

Пусть S — гладкая поверхность положительной кривизны в трехмеоном евклидовом пространстве E^3. Будем считать, что на S зажаны два случайных процесса X_t и Y_t с переходными функциями P^1 и P^2 так, как это было сделано в работе [1]. Коэффициенты первой и второй основных форм поверхности будем обозначать g_{ij} и b_{ij} соответственно. В работе [1] было показано, что имеют место равенства: $g^{11} = \int \frac{d}{dt}\left(P^1\left(t,x,dy\right)\right)_{t=0}\frac{y_1^2}{2}$, $g^{12} = \int \frac{d}{dt}\left(P^1\left(t,x,dy\right)\right)_{t=0} y_1 y_2$, $g^{22} = \int \frac{d}{dt}\left(P^1\left(t,x,dy\right)\right)_{t=0}\frac{y_2^2}{2}$, $b^{11} = \int P^2_{t0}\left(t,x,dy\right)\frac{y_1^2}{2}$, $b^{12} = \int P^2_{t0}\left(t,x,dy\right) y_1 y_2$, $b^{22} = \int P^2_{t0}\left(t,x,dy\right)\frac{y_2^2}{2}$.

Стандартными методами тензорного анализа перейдём к контравариантным координатам. Получим следующие равенства: $g_{11} = \frac{1}{|I|}\int P^1_{t0}\left(t,x,dy\right)\frac{y_2^2}{2}$, $g_{22} = \frac{1}{|I|}\int P^1_{t0}\left(t,x,dy\right)\frac{y_1^2}{2}$, $g_{12} = -\frac{1}{|I|}\int P^1_{t0}\left(t,x,dy\right) y_1 y_2$, где $|I| = \int P^1_{t0}\left(t,x,dy\right)\frac{y_1^2}{2}\cdot \int P^1_{t0}\left(t,x,dy\right)\frac{y_2^2}{2} - \left[\int P^1_{t0}\left(t,x,dy\right) y_1 y_2\right]^2$, $b_{ij} = \Sigma^2_{k,l=1}\frac{1}{|I|^2}\int P^1_{t0}(t,x,dy)\frac{y_i y_k}{1+\delta_{ik}}\int P^1_{t0}(t,x,dy)\frac{y_j y_l}{1+\delta_{jl}} \int P^2_{t0}(t,x,dy)\frac{y_k y_l}{1+\delta_{kl}}$.

Имеет место следующая

Теорема. На поверхности S имеют место соотношения

$$n_1 = \frac{(g_{11}b_{12} - g_{22}b_{11})\vec{r}_1 + (g_{12}b_{11} - g_{11}b_{12})\vec{r}_2}{|I|},$$

$$n_2 = \frac{(g_{12}b_{33} - g_{33}b_{12})\vec{r}_1 + (g_{12}b_{12} - g_{11}b_{22})\vec{r}_2}{|I|},$$

где n — вектор нормали поверхности, коэффициенты основных тензоров берутся из формул, приведённых выше.

Список литературы.

1. Климентов Д.С. Стохастический аналог основной теоремы теории поверхностей для поверхностей положительной кривизны, Известия ВУЗов Северо-Кавказский регион. Естественные науки, 2013, 6, с. 24-27.