

Марковские ветвящиеся случайные блуждания по \mathbb{Z}_+ . Неограниченный случай

А.В. Люлинцев

ПОМИ

Рассматривается однородный марковский процесс $X_n(t)$ с непрерывным временем на фазовом пространстве $\mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, \dots\}$, который мы интерпретируем как движение частицы. Частица может переходить только в соседние точки \mathbb{Z}_+ , то есть при каждой смене положения частицы ее координата изменяется на единицу. Время нахождения частицы в точке зависит от ее координаты. Процесс снабжен механизмом ветвления (см. [1-3]). Источники ветвления могут находиться в каждой точке \mathbb{Z}_+ , при этом мы не предполагаем, что интенсивности равномерно ограничены. В момент ветвления новые частицы появляются в точке ветвления и дальше начинают эволюционировать независимо друг от друга (и от остальных частиц) по тем же законам, что и начальная частица. Такому ветвящемуся марковскому процессу соответствует матрица трехдиагональная матрица Якоби H . Нас будет интересовать случай, когда соответствующий оператор \mathcal{H} является неограниченным самосопряженным.

Матрице H соответствует семейство многочленов $\{P_n(\lambda)\}_{n=0}^\infty$, которые ортонормированы по вероятностной мере ρ (см. [4]). Работа является продолжением [5].

Теорема 1. Пусть $X_n(t)$, $X_n(0) = \delta_n$, — ветвящееся случайное блуждание на \mathbb{Z}_+ . Соответствующий оператор \mathcal{H} самосопряжен. Тогда для среднего числа $N_n(t, m)$ частиц в точке $m \in \mathbb{Z}_+$ в момент времени $t \geq 0$ справедливо равенство

$$N_n(t, m) = \int_{\mathbb{R}} e^{t\lambda} P_m(\lambda) P_n(\lambda) \rho(d\lambda). \quad (1)$$

Проведены вычисления для многочленов Эрмита и многочленов Лагерра. Во втором примере возникает эффект, когда интеграл (1) сходится лишь при $t \in [0, 1)$. Это говорит о том, что при $t \geq 1$ среднее число частиц в системе формально обращается в бесконечность.

1. Гихман И.И., Скороход А.В. Теория случайных процессов, т. II. // Изд-во "Наука", Главная редакция физико-математической литературы, 1973, 598-622.

2. Яровая Е.Б. Ветвящиеся случайные блуждания в неоднородной среде. // М.: Издательство Центра прикладных исследований при механико-математическом факультете МГУ, 2007. – 104 с. ISBN 978-5-211-05431-8.

3. Смородина Н.В., Яровая Е.Б. Об одной предельной теореме для ветвящихся случайных блужданий. // Теория вероятн. и ее примен., 68:4 (2023), 779–795.

4. Ахиезер Н.И. Классическая проблема моментов и некоторые вопросы анализа, связанные с нею. // Государственное издательство физико-математической литературы, Москва, 1961, 9-79.

5. Люлинцев А.В., Марковские ветвящиеся случайные блуждания по \mathbb{Z}_+ . Подход с использованием ортогональных многочленов. I. // Теория вероятн. и ее примен., 69:1 (2024), 91–111.