Сайфутдинова Н.А. Рандомизированная функция Кобба-Дугласа и её применение в математическом моделировании

Классическая функция Кобба-Дугласа является популярным инструментом математического моделирования экономических процессов. Исследование условий строгой вогнутости стохастического аналога такой функции позволяет расширить класс оптимизационных задач, возникающих при моделировании.

Пусть (Ω, F, P) - некоторое вероятностное пространство. Пусть$A, \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ являются неотрицательными случайными величинами (п.в.).

Рассмотрим функцию $f(u_1, u_2, ..., u_n) = E\left(Au_1^{\alpha_1}u_2^{\alpha_2}...u_n^{\alpha_n}\right), u_1 > 0, ..., u_n > 0$. Будем называть эту функцию модифицированной рандомизированной функцией Кобба-Дугласа.

Обозначим:$f(u_1, u_2, ..., u_n) = E\left(Au_1^{\alpha_1}u_2^{\alpha_2}...u_n^{\alpha_n}\right);$

$f_i(u_1, u_2, ..., u_n) = E(\alpha_i f(u_1, u_2, ..., u_n))\, dP, i = 1, 2, ..., n;$

$f_{ij}(u_1, u_2, ..., u_n) = E(\alpha_i \alpha_j f(u_1, u_2, ..., u_n))\, dP, i, j = 1, 2, ..., n.$

Матрица Гессе имеет следующий вид: $(G_n)_{ij} = \begin{cases} \dfrac{1}{u_i^2} f_{ii} - \dfrac{1}{u_i^2} f_i, i = j \\ \dfrac{1}{u_i u_j} f_{ij}, i \neq j \end{cases}$

Для $1 \leq k \leq n$ обозначим $M_k = |G_k| u_1^2 u_2^2 ... u_n^2$, где $|G_k|$- главные диагональные миноры матрицы Гессе.

Теорема. Если $P(\alpha_1 > 0, \alpha_2 > 0, ..., \alpha_n > 0, \alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n < 1) > 0$, и, кроме этого, существует такое число $b > 0$, что $P(0 < A \leq b) = 1$, то для всех $k\,(1 \leq k \leq n)$ и для всех $u_1 > 0, u_2 > 0, ..., u_n > 0$ выполяются неравенства $(-1)^k M_k \leq 0$, и, следовательно, функция $F(u_1, u_2, ..., u_n)$ является строго вогнутой для $u_1 > 0, u_2 > 0, ..., u_n > 0$.