Вычисление несобственных интегралов методами теории вероятностей

Задорожний В. Г. (Воронеж, Россия).

Рассматривается задача Коши

$$\frac{dx}{dt} = \varepsilon x, x(0) = x_0. \tag{1}$$

Здесь $t \in \mathbf{R}, x$ искомая скалярная функция, x_0 заданное число, ε случайная величина, заданная плотностью распределения $p(u)$. Легко проверяется, что $x(t) = x_0 \exp(\varepsilon t)$ является решением задачи (1). Пусть $\varphi(v) = E[\exp(iv)] = \int_{\mathbf{R}} iuvp(u)du$ характеристическая функция случайной величины ε. Здесь $E[g]$ математическое ожидание по плотности распределения случайной величины ε.

Теорема 1. *Если функция φ дифференцируема и существует математическое ожидание решения задачи (1)* $E[x(t)]$, то

$$\int_{\mathbf{R}} \exp(ut)p(u)du = \varphi(-it)),$$

$$E[x(t)] = x_0\varphi(-it)).$$

Теорема 2. (χ^2– распределение [1].) Пусть плотность распределения случайной величины ε имеет вид

$$p(u,k) = \frac{u^{\frac{k}{2}-1}e^{-\frac{u^2}{2}}}{2^{\frac{k}{2}}\Gamma(\frac{k}{2})}$$

при $u > 0$ и $p(u,k) = 0$ при $u \leq 0$, тогда $\varphi(v) = (1-2iv)^{-\frac{k}{2}}$ характеристическая функция для ε. Тогда $\varphi(-it) = (1-2t)^{-\frac{k}{2}}$ и

$$\int_0^\infty e^{ut}\frac{u^{\frac{k}{2}-1}e^{-\frac{u^2}{2}}}{2^{\frac{k}{2}}\Gamma(\frac{k}{2})}du = (1-2t)^{-\frac{k}{2}}$$

Литература. 1. Задорожний В.Г. Методы вариационного анализа. - М.-Ижевск: НИЦ, Регулярная и хаотическая динамика, 2006. – 316 с.

Можно поставить пленарный доклад.