Вероятности достижений для случайного блуждания в полуплоскости

А.А. Замятин, Э.Ю. Калимулина

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова

Рассмотрим однородную по времени марковскую цепь $\xi_n = (\xi_n^1, \xi_n^2)$ с пространством состояний $\Pi = Z \times Z_+$ и с переходными вероятностями

$$p_{l_1 j_1}^{lj} = P(\xi_{n+1} = (l_1, j_1) | \xi_n = (l, j)),\ (l, j), (l_1, j_1) \in \Pi,$$

удовлетворяющими следующим условиям:

- марковская цепь ξ_n является неприводимой и непериодичной
- условие ограниченности скачков по первой координате: при $|l - l_1| > 1$

$$p_{l_1 j_1}^{lj} = 0$$

- пространственная однородность по первой координате

$$p_{l_1 j_1}^{lj} = p_{l_1 + h, j_1}^{l+h, j} \tag{1}$$

  для любого $h \in Z$.

Определим индуцированную марковскую цепь $\eta_n \in Z_+$ с переходными вероятностям

$$_0 p_{j_1}^{j} = p_{l+1 j_1}^{lj} + p_{l j_1}^{lj} + p_{l-1 j_1}^{lj} \tag{2}$$

Допустим, что для индуцированной цепи существует функция (функция Ляпунова) $f(k) > 0, k \in Z_+$: существуют $\epsilon > 0$, $m > 0$, $L > 0$ такие, что для всех $k > L$

$$E(f(\eta_{n+m}) - f(\eta_n) | \eta_n = k) \le -\epsilon$$

Обозначим через π_j стационарное распределение индуцированной цепи и введем индуцированный вектор:

$$v = \sum_{j=0}^{\infty} \pi_j m_j \tag{3}$$

где

$$m_j = E(\xi_{n+1}^1 - \xi_n^1 | \xi_n^1 = 0, \xi_n^2 = j), j \in Z_+ \tag{4}$$

Рассмотрим множество $A = \{(0, j), j \in Z_+\} \subset \Pi$. Определим распределение точки первого возвращения в A (если начальное состояние из A) и распределение точки первого попадания в A (если начальное состояние вне A) как

$$r_{0j}^{0m} = P(\sigma_A < \infty, \xi_{\sigma_A} = (0, j) | \xi_0 = (0, m)) \tag{5}$$

$$h_{0j}^{i_0 j_0} = P(\sigma_A < \infty, \xi_{\sigma_A} = (0, j) | \xi_0 = (i_0, j_0)), (i_0, j_0) \notin A \tag{6}$$

где σ_A– первый момент возвращения (попадания) в A. Наша цель – исследовать предельное поведение вероятностей $h_{0j}^{i_0 j_0}$ при условии, что начальное состояние удаляется от множества A :

Theorem 1 *Пусть $v<0$. При $i_0 \to \infty$*

$$h_{0j}^{i_0 j_0} \to \mu_{0j} = \frac{1}{|v|}(\pi_j - \sum_{m=0}^{\infty} \pi_m r_{0j}^{0m}), j \in Z_+$$

причем, сходимость является экспоненциально быстрой

$$\sum_{j \in Z_+} |h_{0j}^{i_0 j_0} - \mu_{0j}| < C_{j_0} \sigma^{i_0}, 0 < \sigma < 1$$