Олег Витальевич Русаков, Андрей Николаевич Фролов, Санкт-Петербургский государственный университет, математико-механический факультет. **О сходимости ПСИ-процессов к процессам типа Орнштейна-Уленбека с безгранично делимым распределением.**

Рассмотрим следующий триплет $\{(\xi), \lambda, \Pi(t)\}$, $t \geq 0$, состоящий из независимых компонент: $(\xi) = \xi[0], \xi[1], \ldots$ — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин, которую мы назовем «ведомой»; λ — положительная п.н. случайная величина (возможно константа); $\Pi(t)$ — стандартный пуассоновский процесс (с единичной интенсивностью). Определим ПСИ-процесс (пуассоновского случайного индекса процесс) $\psi(t) = \xi[\Pi(\lambda t)], \quad t \geq 0$. Отметим, что ψ — стационарный процесс, распределение которого в пространстве Скорохода определяются триплетом $\{\xi[0], \lambda, \Pi(t)\}$. Каждый ПСИ-процесс — это процесс последовательных случайных замещений членов «ведомой» последовательности.

Рассмотрим $\{\xi_{nk} = \xi_{nk}[0],\, 1 \leqslant k \leqslant n,\, n \in \mathbb{N}\}$ — последовательность серий независимых в каждой серии случайных величин, возможно неодинаково распределенных, которая удовлетворяет УБМ — условию бесконечной малости (инфинитезимальности). По этой схеме серий построим последовательность серий независимых в каждой серии ПСИ-процессов $\{\psi_{nk}\}$ так чтобы соответствующие $\{\lambda_{nk}\}$ и $\{\Pi_{nk}\}$ были независимы и одинаково распределены в каждой серии, а распределение членов «ведомой» последовательности задается соответствующим начальным членом $\xi_{nk} = \xi_{nk}[0]$. Обозначим характеристическую функцию $f_{nk}(u) = Ee^{iu\xi_{nk}}$ и предположим, что $\prod_{k=1}^{n} f_{nk}(u) \to f(u)$ для любого $u \in \mathbb{R}$, где $f(u)$ — безгранично делимая характеристическая функция. Наша цель — при данном предположении о слабой сходимости начальных членов $\xi_{nk}[0]$ доказать сходимость d - мерных распределений в схеме серий соответствующих ПСИ-процессов $\{\psi_{nk}\}$ при $n \to \infty$. Введем обозначение $\mathbf{B} = \bigcup_{m=1}^{d} \mathbf{B}_m$, где

$$\mathbf{B}_m = \left\{\{j_1 + 1 \ldots j_2, j_2 + 1 \ldots j_3, \ldots, j_m + 1 \ldots j_{m+1}\} : 0 = j_1 < j_2 < \cdots < j_m < j_{m+1} = d\right\}.$$

Множество $\mathbf{B}$ представляет собой форму записи для разбиений $\{1, 2, \ldots, d\}$ на попарно непересекающиеся подмножества. Пусть $\{p_b\}_{b \in \mathbf{B}}$ — множество неотрицательных чисел таких, что $\sum_{b \in \mathbf{B}} p_b = 1$. Эти числа определяются соответственно d моментами времени для рассматриваемых ПСИ-процессов и показывают распределение вероятностей количества замещений членов «ведомой» последовательности на промежутке от минимального до максимального из рассматриваемых d моментов времени.

Теорема 1. Для любых $u = (u_1, u_2, \ldots u_d)$, $1 \leqslant m \leqslant d$ и $b \in \mathbf{B}_m$. Положим $f_b(u) = \prod_{l=1}^{m} f(v_l)$ и $f_{nk,b}(u) = \prod_{l=1}^{m} f_{nk}(v_l)$ для всех k и n, где $v_l = \sum_{r=j_l+1}^{j_{l+1}} u_r$ для $1 \leqslant l \leqslant m$. Тогда для любого $u \in \mathbb{R}^d$ имеет место сходимость характеристических функций, $n \to \infty$,

$$\prod_{k=1}^{n} \left(\sum_{b \in \mathbf{B}} p_b f_{nk,b}(u) \right) \to \prod_{b \in \mathbf{B}} f_b^{p_b}(u).$$

Данная теорема позволяет установить факт функциональной сходимости в пространстве Скорохода серий ПСИ-процессов к гауссовскому пределу в смысле теоремы Линдеберга.

Теорема 2. Если λ имеет конечное математическое ожидание, то последовательность $\{\psi_{nk}(t)\}$ слабо сходится к гауссовскому стационарному процессу с ковариацией, равной преобразованию Лапласа λ на любом конечном интервале времени.

Доказательство теоремы 2 опирается на теорему 1 и теорему 5.4 VII [1]. В случае, когда ПСИ-процессы в схеме серий одинаково распределены факт функциональной сходимости к гауссовскому пределу непосредственно следует из теоремы 3.46 VIII [1].

Литература.

[1] Ж.Жакод, А.Н.Ширяев *Предельные теоремы для случайных процессов.* Москва, Издательская фирма «Физико-Математическая Литература», т. I,II, 1994