М.С. Тихов (ННГУ им. Н.И. Лобачевского, Нижний Новгород, Россия).
Оценки функции распределения в модели q-геометрической регрессии зависимости «доза-эффект».

Пусть $\mathcal{X}^{(n)} = (X_1, \ldots, X_n)$ – независимые одинаково распределенные случайные величины (с.в.) с плотностью $f(x)$ и функцией распределения (ф.р.) $F(x)$, $\mathcal{U}^{(n)} = (u_1, \ldots, u_n)$ – неслучайные величины, а $W_j = I(X_j < u_j)$ – индикатор события $(X_j < u_j)$, $1 \le j \le n$. Мы наблюдаем выборку $\mathcal{W}^{(n)} = \{(W_j, u_j), j = 1, ..., n\}$, по которой требуется построить оценку ф. р. $F(x)$.

В качестве оценки $F(x)$ обычно берут статистику

$\hat{F}_n(x) = S_2(x)/S_1(x)$,где $h = h(n)$, $hn^{1/5} = 1 + o(1)$ при $n \to \infty$,

$S_2(x) = (nh)^{-1} \sum\limits_{j=1}^{n} W_j K((x - u_j)h^{-1})$, $S_1(x) = (nh)^{-1} \sum\limits_{j=1}^{n} K((x - u_j)h^{-1})$.

Пусть теперь W_{ij} есть i-й ответ, когда неслучайная ковариата равна u_j, и ответы W_{ij} являются взаимно независимыми. Тогда $p_j = F(u_j) = \mathbf{P}(W_{ij} = 1)$. При каждой ковариате u_j проводятся испытания до получения m «успехов». В этом случае мы имеем отрицательное биномиальное распределение $z_j \in \boldsymbol{NB}(p_j, m)$. При $m = 1$ (геометрическое распределение) в качестве оценки ф.р. $F(x)$ возьмем статистику

$$\tilde{F}_n(x) = (\sum_{j=1}^{n} m\eta_i(x))(\sum_{j=1}^{n} z_j \eta_i(x))^{-1}, \quad \text{где } \eta_i(x) = K((u_i - x)/h)/h,$$

В [1] установлено, что при некоторых условиях асимптотическое распределение нормированной разности этих оценок является нормальным с асимптотической дисперсией $\sigma^2(x) = F^2(x)(1 - F(x))\,||K||^2$, где $||K||^2 = \int_{-\infty}^{\infty} K^2(x)\,dx$. Когда $F(u_j)$ мало, то с.в. z_j могут принимать большие значения и желательно ограничить объем выборки, поэтому здесь в оценке $\tilde{F}_n(x)$ мы будем брать условную геометрически распределенную с.в. ($z_j \in \boldsymbol{NB}(M, p_j, 1)$): $\mathbf{P}(z = k | z \le M) = \dfrac{q^{k-1}}{[M]_q}$, $k = 1, 2, ...M$, где $[M]_q = (1 - q^M)/(1 - q) = 1 + q + ... + q^{M-1}$ есть *q-целое число.* Это распределение называется *q-равномерным распределением* на множестве $\{1, 2, ..., M\}$ (см. [2], с.8), и где $p = p_j = F(u_j)$, $q = 1 - p$. Если с.в. Z_M имеет q-равномерное распределение, то ее производящая функция равна $\psi(t) = \mathbf{E}(\exp(tZ) | Z \le M) = \dfrac{(1 - q)e^t(1 - (qe^t)^M)}{(1 - q^M)(1 - qe^t)}$, по которой мы находим математическое ожидание $\mathbf{E}(Z_M) = 1/p - M\,q^M/(1 - q^M)$ и дисперсию $\mathbf{D}(Z_M)$.

Пусть $q(x) = (1 - F(x))^M$, $a(x) = 1 - \dfrac{M \cdot F(x)q(x)}{1 - q(x)}$, $\nu(x) = F(x)/a(x)$, и $\{u_1, u_2, ..., u_n\}$ есть почти равномерная последовательность Ван дер Корпута.

Теорема. *При условиях теоремы* 4.1 [1],

$$\text{(i)} \quad \tilde{F}_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{p} \nu(x), \qquad \text{(ii)} \quad \sqrt{nh}(\tilde{F}_n(x) - \mathbf{E}(\tilde{F}_n(x)) \xrightarrow[n\to\infty]{d} N(0, \sigma_1^2(x)),$$

где $\sigma_1^2(x) = \rho^2(x)/a^4(x)$, $\rho^2(x) = F^2(x)(1 - F(x) + \dfrac{F^2(x)(2 - F(x))q(x)}{1 - q(x)}\, M -$

$$- \frac{q(x)(2(F(x) - 1)q(x) + (1 - F(x))^2)F^2(x)}{(1 - q(x))^2}\, M^2.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] М. С. Тихов, Отрицательная биномиальная регрессия в зависимости доза-эффект, *Уфимский математ. журнал*, **14**:4 (2022), 100-116.

[2] Ch.A. Charalambides, *Discrete q-distributions*, John Wiley & Sons, 2016, 245 p.