В. И. Афанасьев. Предельные теоремы для функционалов от ветвящегося процесса в случайной среде, начинающегося с большого числа частиц[1]

Пусть $\left\{Z_i^{(k)}, i \in \mathbf{N}_0\right\}$ – ветвящийся процесс в случайной среде $\{Q_i, i \in \mathbf{N}\}$, начинающийся с k частиц. Предполагается, что $Q_1, Q_2, \ldots$ независимы и одинаково распределены. Пусть $f_i(\cdot)$ – производящая функция распределения Q_i. Положим $X_i = \ln f_i'(1)$, $\eta_i = f_i''(1) / (f_i'(1))^2$. Введем *сопровождающее случайное блуждание* $S_0 = 0$, $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$, $n \in \mathbf{N}$.

Предположение A. Случайная величина X_1 принадлежит без центрирования области притяжения некоторого строго устойчивого закона с индексом $\alpha \in (0, 2]$ и этот закон не является односторонним.

Предположение B. При некотором $q > 0$ $\mathbf{E} \ln^{\alpha+q}(\eta_1 \vee 1) < +\infty$.

По теореме Скорохода существует такая положительная числовая последовательность $\{A_n, n \in \mathbf{N}\}$, что последовательность случайных процессов $U_n = \left\{S_{\lfloor nt \rfloor}/A_{\lfloor nt \rfloor}, t \geq 0\right\}$ сходится при $n \to \infty$ по распределению в пространстве $D[0, +\infty)$ с топологией Скорохода к строго устойчивому процессу Леви $U = \{U(t), t \geq 0\}$ с индексом $\alpha \in (0, 2]$, причем $\mathbf{E}e^{i\lambda U(1)} = \exp(-c|\lambda|^\alpha (1 - i\beta sgn(\lambda) \tan(\pi\alpha/2)))$ при $\lambda \in \mathbf{R}$, где c и β – некоторые параметры ($c > 0$ и $\beta \in [-1, 1]$).

Зафиксируем $x \in (0, +\infty)$. Предположим, что $k = k_n$, причем $\ln k_n \sim A_n x$ при $n \to \infty$. Пусть $T^{(k_n)}$ – момент вырождения ветвящегося процесса $\left\{Z_i^{(k_n)}, i \in \mathbf{N}_0\right\}$. Положим $L(t) = \inf_{0 \leq s \leq t} U(s)$ при $t \geq 0$. Пусть T_{-a} – момент первого достижения множества $(-\infty, -a]$, где $a > 0$, процессом $\{L(t), t \geq 0\}$.

Теорема 1. *Пусть выполнены предположения* A, B, *тогда при* $n \to \infty$

$$\frac{T^{(k_n)}}{n} \xrightarrow{D} T_{-x}.$$

Положим $M^{(k_n)} = \max_{0 \leq i < +\infty} Z_i^{(k_n)}$, $\Sigma^{(k_n)} = \sum_{i=0}^\infty Z_i^{(k_n)}$ и $M_x = x + M(T_{-x})$ где $M(t) = \sup_{0 \leq s \leq t} U(s)$ при $t \geq 0$.

Теорема 2. *Пусть выполнены предположения* A, B, *тогда при* $n \to \infty$

$$\frac{\ln M^{(k_n)}}{A_n} \xrightarrow{D} M_x.$$

Теорема 3. *Пусть выполнены предположения* A, B, *тогда при* $n \to \infty$

$$\frac{\ln \Sigma^{(k_n)}}{A_n} \xrightarrow{D} M_x.$$

Распределение функционалов T_{-x} и M_x, участвующих в формулировках теорем 1-3, найдены в явном виде, если $\alpha \in (1, 2)$ и скачки случайного процесса U одного знака.

[1]Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда N 24-11-00037, https://rscf.ru/project/24-11-00037/