Об одном вязкостном решении уравнения G-теплопроводности в связи с формулой Блэка-Шоулза для модели стохастической волатильности.

Данилова Н.В. и Белявский Г.И., Россия, Ростов-на-Дону, Южный федеральный университет

Рассматривается стандартный винеровский процесс W на конечном интервале времени $[0, T]$, рассматривается банахово пространство ограниченных на том же интервале функций $l_\infty([0, T])$. В этом пространстве рассматривается подмножество функций Σ с компактным срезом, определенным для всех $t \in [0, T]$, следующим образом $\Sigma_t = \{x \in R^+ : \exists(\sigma \in \Sigma) \wedge (\sigma(t) = x))\}$. На основе любой вероятностной меры P, определенной на борелевской сигма-алгебре ограниченных функций, можно определить вероятностную меру $P_\Sigma(A) = \begin{cases} P(A \cdot \Sigma)/\, P(\Sigma), \text{если } P(\Sigma) \neq 0 \\ 0, \text{если } P(\Sigma) = 0 \end{cases}$. Обозначим через $\mathcal{P}_\Sigma$ множество таких мер. Под управлением двух независимых случайных процессов W и X, каждый из которых адаптирован относительно своего стохастического базиса, а именно, $\langle C[0, T]$, $(F_t^W)_{t \geq 0}, F_T^W, P^W \rangle$ и $\langle l^\infty[0, T]$, $(F_t^X)_{t \geq 0}, F_T^X, \mathcal{P}_\Sigma \rangle$, определяется $(1, S)$ – рынок с рисковым активом, стоимость которого подчинена стохастическому дифференциальному уравнению: $dS(t) = X(t)S(t)dW(t)$, с начальным условием равным S_0. Случайный процесс S адаптирован к декартовому произведению приведенных ранее стохастических базисов и является мартингалом по отношению к любой мере семейства $P^W \times \mathcal{P}_\Sigma$, так как условие Новикова выполнено по отношению к любой мере семейства $\mathcal{P}_\Sigma$. Поэтому естественным выглядит следующая формула для верхней цены хеджирования: $N = \underset{Q \in P^W \times \mathcal{P}_\Sigma}{Sup} E_Q f(S_T)$. Предполагается, что марковское финансовое обязательство $f(S_T)$ неотрицательно и $E_Q f(S_T) < \infty$ для всех мер из рассматриваемого семейства $P^W \times \mathcal{P}_\Sigma$ мер. Обозначим через $M(t)$ – верхнюю огибающую семейства срезов Σ_t, через $m(t)$ - нижнюю огибающую. Предполагается, что $M(t)$ и $m(t)$ – непрерывные функции. Справедлива следующая теорема для верхней цены хеджирования.

Теорема. Если финансовое обязательство $f(x)$ – непрерывная функция (дополнительное требование к уже имеющимся), то верхняя цена хеджирования вычисляется по формуле $N = V(S_0, 0)$, в которой функция $V(x, t)$ – единственное вязкостное решение задачи Коши для нелинейного уравнения теплопроводности: $\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{x^2}{2}\left[\frac{M^2(t) - m^2(t)}{2}\left|\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\right| + \frac{M^2(t) + m^2(t)}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\right]$, с начальным условием $V(T, x) = f(x)$.

Из теоремы вытекает важное следствие.

Следствие1. Если дополнительно $f(x)$ – выпуклая функция, то формула для вычисления верхней цены имеет тот же вид: $N = V(S_0, 0)$, однако, функция $V(x, t)$ – единственное решение задачи Коши для линейного уравнения теплопроводности: $\frac{\partial V}{\partial t} +$

$\frac{x^2 M^2(t)}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}$, с начальным условием $V(T,x) = f(x)$. Второе следствие позволяет увязать изучаемую модель с моделью Блэка-Шоулза.

Следствие 2. Если дополнительно потребовать, чтобы верхняя огибающая была константой, то есть $M(t) = \hat{\sigma}$, то в формуле для цены функция $V(x,t)$ – единственное решение задачи Коши для линейного уравнения теплопроводности: $\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\hat{\sigma}^2 x^2}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial^2 x}$, с начальным условием $V(T,x) = f(x)$. В результате чего и возникает формула Блэка-Шоулза.