Деривационные уравнения Вейнгартена для поверхностей класса C^1

Д.С. Климентов

4 мая 2025 г.

Пусть S — гладкая поверхность класса C^1 с параметризацией $\vec{r} = \vec{r}(x^1, x^2)$ положительной кривизны в трехмерном евклидовом пространстве E^3. Не ограничивая общности, можно считать, что вторая основная форма поверхности приведена к изометрическому виду: $II = \mu({x^1}^2 + d{x^2}^2)$. Первую форму поверхности S будем обозначать $I = g_{ij}dx^i dx^j$. При выводе уравнений Вейнгартена используется понятие второй производной Ито вдоль траектории броуновского движения на S. Подробнее об этом можно посмотреть в [1]. В этой же работе выводится соотношение для коэффициента второй формы: $\mu(B_t^1)dt = \frac{\vec{r}_{12I}, \vec{r}_1, \vec{r}_2)}{|I|}$, где $\vec{r}_{12I}$ — вторая производная Ито. Имеет место следующая

Теорема. На поверхности S имеют место соотношения

$$n_1 = \mu \left[\frac{(g_{11} - g_{22})\vec{r}_1 + (g_{12} - g_{11})\vec{r}_2}{|I|} \right],$$

$$n_2 = \mu \left[\frac{(g_{12} - g_{22}b_{12})\vec{r}_1 + (g_{12} - g_{11})\vec{r}_2}{|I|} \right],$$

где n — вектор нормали поверхности, μ приведено выше, производные нормали понимаются в смысле Шварца.

Список литературы.

1. Климентов Д.С. Стохастическая дифференциальная геометрия гладких поверхностей положительной кривизны, Прикладная математика и физика том 55 №3 (2023) с. 220-227