Лебедев А.В. (МГУ)

Трехмерные полиномиальные копулы и нетранзитивные наборы случайных величин

Работа посвящена проблеме нетранзитивности стохастического предшествования [1]. В простейшей постановке, речь идет о ситуации, когда для трех случайных величин X_1, X_2, X_3 верно

$$\mathbf{P}(X_1 < X_2) > 1/2, \quad \mathbf{P}(X_2 < X_3) > 1/2, \quad \mathbf{P}(X_3 < X_1) > 1/2. \tag{1}$$

Представляет интерес не только сам факт, но и сила нетранзитивности

$$P_{X_1X_2X_3} = \min\{\mathbf{P}(X_1 < X_2), \mathbf{P}(X_2 < X_3), \mathbf{P}(X_3 < X_1)\}.$$

Далее проводится обобщение примера 3 из [2].

Рассмотрим полиномиальную плотность на $[0,1]^3$ вида

$$p(x_1, x_2, x_3) = 1 + \sum_{i=1}^{3} a_i x_i + \sum_{j=1}^{3} b_i x_i^2 + \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} c_{ij} x_i x_j^2, \tag{2}$$

где C — матрица 3×3 с $c_{ii} = 0$, $1 \le i \le 3$, в предположении $p(x_1, x_2, x_3) \ge 0$.

Теорема 1. *Плотность (2) задает копулу тогда и только тогда, когда*

$$a_i = -\frac{1}{3}(c_{ij} + c_{ik}), \quad b_i = -\frac{1}{2}(c_{ji} + c_{ki}), \tag{3}$$

где i, j, k все различны, $1 \le i, j, k \le 3$, и

$$\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} c_{ij} = 0.$$

Теорема 2. *Плотность (2) в случае кососимметричной матрицы C и выполнения условий (3) обладает свойством нетранзитивности (1) тогда и только тогда, когда $C = AC^0$, где число $A > 0$ и C^0 — кососимметричная матрица с элементами*

$$c_{12}^0 = \frac{10}{32}w_1 + \frac{11}{32}w_2 + \frac{11}{32}w_3, \quad c_{23}^0 = \frac{11}{32}w_1 + \frac{10}{32}w_2 + \frac{11}{32}w_3, \quad c_{31}^0 = \frac{11}{32}w_1 + \frac{11}{32}w_2 + \frac{10}{32}w_3. \tag{4}$$

при $0 < w_i < 1$, $1 \le i \le 3$, $w_1 + w_2 + w_3 = 1$, тогда

$$\mathbf{P}(X_i < X_j) = \frac{1}{2} + \frac{A(1 - w_i)}{360}, \quad 1 \le i \le 3,$$

где j — следующий за i индекс в цикле $1 \to 2 \to 3 \to 1$.

Остается вопрос, насколько большим может быть A, чтобы максимизировать нетранзитивность при сохранении неотрицательности плотности. Численно получается, что максимум $P_{X_1X_2X_3} = 47/90 = 0{,}522...$ достигается при $w_1 = w_2 = w_3 = 1/3$, $A = 12$.

Список литературы

[1] *Trybula S.* On the paradox of three random variables // Zastos. Matem. 1961. V. 5. N 4. P. 321–332.

[2] *Лебедев А.В.* Многомерные непрерывные распределения и копулы, порождающие нетранзитивные наборы зависимых случайных величин // Автоматика и телемеханика. 2025. N 4. С. 55–70.