Саенко В. В.[1]

Оценка остаточного члена в разложении устойчивого закона при $\alpha \to 0$

Характеристический параметр устойчивых законов может принимать значения из интервала $(0, 2]$. Независимо от системы параметризации этот параметр непрерывен в интервалах $(0,1)$ и $(1,2)$. В окрестности точек $\alpha = 0$ и $\alpha = 1$ для исследования поведения и вычисления устойчивых законов необходимо использовать соответствующие асимптотические разложения. Ранее в работе [1] было получено такое разложение, а в работе [2] исследован главный асимптотический член этого разложения. Однако, для практический целей важно иметь еще и оценку остаточного члена этого разложения. Данная работа направлена на получение оценки остаточного члена в разложении устойчивого закона при $\alpha \to 0$.

Рассмотрим устойчивый закон с характеристической функций $\hat{g}(t,\alpha,\theta) = \exp\left\{-|t|^\alpha \exp\{-i\frac{\pi}{2}\alpha\theta \operatorname{sign} t\}\right\}$, где $t \in \mathbf{R}$, $\alpha \in (0,2]$, $|\theta| \leqslant \min(1, 2/\alpha - 1)$. Для разложения плотности вероятности и функции распределения устойчивого закона справедлива следующая теорема.

Теорема 1 *Для любых фиксированных $-1 \leqslant \theta \leqslant 1$ и $y \in R^1$ разложение плотности вероятности $g(y,\alpha,\theta)$ и функции распределения $G(y,\alpha,\theta)$ устойчивого закона при $\alpha \to 0$ и $y \neq 0$ имеют вид*

$$G(y,\alpha,\theta) = \tfrac{1}{2}(1-\theta) + \tfrac{1}{2}(\operatorname{sign} y + \theta)e^{-|y|^{-\alpha}} + \tfrac{1}{2}e^{-|y|^{-\alpha}}\sum_{n=1}^{N}\left(\operatorname{sign} y\, C_n^{(0)}(\theta) + \theta C_n^{(1)}(\theta)\right)P_n(|y|^\alpha)\frac{\alpha^n}{n!} + R_{N+1}^G(y,\alpha,\theta),$$

$$g(y,\alpha,\theta) = \tfrac{\alpha}{2}(1+\theta \operatorname{sign} y)|y|^{-\alpha-1}e^{-|y|^{-\alpha}} - \tfrac{\alpha}{2|y|}e^{-|y|^{-\alpha}}\sum_{n=1}^{N}\left(C_n^{(0)}(\theta) + \theta \operatorname{sign} y\, C_n^{(1)}(\theta)\right)P_{n+1}\left(|y|^\alpha\right)\frac{\alpha^n}{n!} + R_{N+1}^g(y,\alpha,\theta)$$

где для остаточных членов $R_{N+1}^G(x,\alpha,\theta)$ и $R_{N+1}^g(x,\alpha,\theta)$ справедливы оценки

$$R_{N+1}^G(y,\alpha,\theta) \leqslant \mathbb{R}_{N+1}^G(y,\alpha,\theta) = \frac{1}{2}\frac{\alpha^{N+1}}{(N+1)!}\left(\bar{C}_{N+1}^{(0)}(\theta) + |\theta|\bar{C}_{N+1}^{(1)}(\theta)\right)e^{-|y|^{-\alpha}}\bar{P}_{N+1}(|y|^\alpha),$$

$$R_{N+1}^g(y,\alpha,\theta) \leqslant \mathbb{R}_{N+1}^g(y,\alpha,\theta) = \frac{\alpha^{N+2}}{(N+1)!}\left(\bar{C}_{N+1}^{(0)}(\theta) + |\theta|\bar{C}_{N+1}^{(0)}(\theta)\right)\frac{e^{-|y|^{-\alpha}}}{2|y|}\bar{P}_{N+2}\left(|y|^\alpha\right).$$

Здесь

$$\begin{aligned}
C_n^{(k)}(\theta) =& Y_n\left(a_1^{(k)}(\theta), a_2^{(k)}(\theta), \dots, a_n^{(k)}(\theta)\right), \quad k = 0,1,\\
a_n^{(k)}(\theta) =& \begin{cases} -\mathbb{C}, & n = 1,\\ \frac{1}{n}(2^n-1)^{1-k}\pi^n(1-\theta^n)|B_n| - (n-1)!\zeta(n), & n \geqslant 2.\end{cases}\\
\bar{C}_n^{(k)}(\theta) =& Y_n\left(\bar{a}_1^{(k)}(\theta), \bar{a}_2^{(k)}(\theta), \dots, \bar{a}_n^{(k)}(\theta)\right), \quad k = 0,1,\\
\bar{a}_n^{(k)}(\theta) =& \begin{cases} \mathbb{C}, & n = 1,\\ \frac{1}{n}(2^n-1)^{1-k}\pi^n(1-\theta^n)|B_n| + (n-1)!\zeta(n), & n \geqslant 2,\end{cases}
\end{aligned}$$

где $\mathbb{C} = 0.577\dots$ - постоянная Эйлера, B_n - числа Бернулли, $\zeta(n)$ - Дзета-функция Римана, $Y_n(x_1, x_2, \dots, x_n)$ - полные полиномы Белла, $P_n(y)$ и $\bar{P}_n(y)$ - полиномы, удовлетворяющие рекуррентным соотношениям

$$P_{n+1}(y) = -\tfrac{1}{y}P_n(y) - yP_n'(y), \quad P_0(y) = 1; \quad \bar{P}_{n+1}(y) = \tfrac{1}{y}\bar{P}_n(y) - y\bar{P}_n'(y), \quad \bar{P}_0(y) = 1.$$

Список литературы

[1] В. М. Золотарев, Одномерные устойчивые распределения, Наука. Глав. ред. физ.-мат. лит., Москва, 1983.

[2] N. Cressie, A note on the behaviour of the stable distributions for small index α, Probability Theory and Related Fields 33 (1) (1975) 61–64. doi:10.1007/BF00539862.

[1]Ульяновский государственный университет, ул. Льва Толстого, д. 42, Ульяновск, 432017, Россия, e-mail: *vvsaenko@inbox.ru*