Зотова Е. И. (УУНиТ, Уфа, Россия). **О методе решения задачи Коши для стохастических и детерминированных обобщенных уравнений Бюргерса**

Пусть на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ задан случайный процесс $V(t)$, $t \in [0,T]$, обладающий непрерывными с вероятностью 1 реализациями. Исследуется задача Коши для стохастического обобщенного уравнения Бюргерса с шумом в нелинейной части:

$$u(x,t) - u(x,0) + \int_0^t u_x(x,s) f'(u(x,s)) * dV(s) = \int_0^t u_{xx}(x,s)ds, \qquad (1)$$
$$u(x,0) = \varphi(x), \quad (x,t) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}^+.$$

Здесь интеграл в левой части равенства (1) — симметричный интеграл [1] относительно процесса $V(t)$. Если $V(t)$ является винеровским процессом, то симметричный интеграл совпадает со стохастическим интегралом Стратоновича. В случае гладкой функции $V(t)$ задачу (1) можно записать в виде

$$u_t + u_x f'(u) V'(t) = u_{xx}, \quad u(x,0) = \varphi(x).$$

Известно, что преобразование Коула-Хопфа [2] сводит детерминированное обобщенное уравнение Бюргерса с $f(u) = \frac{u^2}{2}$ к уравнению теплопроводности, решение которого известно. В работе представлен новый способа решения задачи Коши для стохастических и детерминированных обобщенных уравнений Бюргерса.

Теорема. *Пусть функция $g(x,v)$ удовлетворяет задаче Коши для обобщенного уравнения Хопфа*

$$g_v + g_x f'(g) = 0, \quad g(x,0) = \varphi(x), \quad (x,v) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}.$$

Тогда функция

$$u(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} g(\xi, V(t)) \exp\left\{\frac{-(x-\xi)^2}{4t}\right\} d\xi, \qquad (2)$$

является решением задачи Коши для стохастического обобщенного уравнения Бюргерса (1).

Представленное в теореме решение (2) является преобразованием Вейерштрасса [3] от функции $g(x, V(t))$ с параметром t. Преобразование Вейерштрасса дает "сглаженную" версию функции $g(x, V(t))$, что гарантирует гладкость решения.

Пример. Для задачи Коши (1) при $f(u) = \frac{u^2}{2}$ и начальном условии

$$\varphi(x) = \begin{cases} u_1, & x \le 0, \\ u_2, & x > 0, \end{cases}$$

где $u_1 > u_2$ и $a = \frac{u_1+u_2}{2}$ константы, решение имеет вид

$$u(x,t) = u_1 \Phi\left(\frac{aV(t)-x}{\sqrt{2t}}\right) + u_2\left(1 - \Phi\left(\frac{aV(t)-x}{\sqrt{2t}}\right)\right), \qquad (3)$$

где $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} \exp\left\{\frac{-y^2}{2}\right\} dy$ – функция Лапласа.

Если $V(t) = W(t)$, где $W(t)$ — винеровский процесс, то соотношение (3) – решение задачи Коши для стохастического уравнения Бюргерса с винеровским шумом. При $V(t) = t$ соотношение (3) является решением задачи Коши для классического уравнения Бюргерса [2].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Насыров Ф.С., *Локальные времена, симметричные интегралы и стохастический анализ*, ФИЗМАТЛИТ, Москва, 2011.

[2] Hopf, E., *The partial differential equation $u_t + uu_x = u_{xx}$*, Comm. Pure and Appl. Math., Vol. 3, pp. 201–230, 1950.

[3] Zayed A. I., *Handbook of Function and Generalized Function Transformations*, Chapter 18. CRC Press, 1996.