Тезисы докладов, присланные в оргкомитет.
Сохранено авторское оформление.

Abstracts of reports sent to the organizing committee.
The author's design has been preserved.

Atayan A. M. (Don State Technical University, Rostov-on-Don) **Calculation of the operating time of a computing system based on correlation analysis**

In the modern world, the issues of ecology and the preservation of the quality of coastal (especially fresh) and commercial waters are becoming more and more relevant. In order to preserve water complexes and maintain their integrity, it is important not only to take organizational, engineering and technical solutions, but also to have highly effective methods for modeling various potential and actual mechanisms of primary and secondary pollution of coastal systems, which make it possible to quickly and efficiently, based on interrelated high-precision models of hydrophysics and hydrobiology predict the processes of pollution spreading and the occurrence of hazardous phenomena in coastal systems [1, 2].

To increase the accuracy of mathematical models based on solving diffusion-convection problems, it is necessary to include factors that have a significant impact on hydrobiological processes: parameterizable microturbulent diffusion and advective transport in various directions [3]. The calculation of data on a multiprocessor computer system can significantly reduce the computation time. However, the time efficiency of a computing system may not always be expected. In this case, it is correct to carry out a theoretical analysis of the calculation of the computation time based on the correlation analysis.

Let there be a certain variable i, which represents the ith observation of the dependent variable y_i, and wee denote the explanatory factors by a vector x_i. Then we can express the multiple regression model in the following form:

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{i2} + \cdots + \beta_p x_{ip} + \varepsilon_i, \tag{1}$$

where $i = 1, 2, \ldots, p$; β – free member, ε_i – member containing the error.

Vector final regularity n is a matrix of values of explanatory factors, dimension n on the $(p+1)$. The model in matrix form will look like

$$Y = X\beta + \varepsilon. \tag{2}$$

The estimate of this model for some sample will be an equation in which $\beta = (\beta_0, \beta_1 ... \beta_p)'$, $\varepsilon = (\varepsilon_0, \varepsilon_1 ... \varepsilon_n)'$.

The condition for minimizing the residual sum of squares can be represented as:

$$S = \sum_{i=1}^{n} (y_{x_i} - y_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i^2 = \varepsilon\varepsilon' = (Y - X\beta)'(Y - X\beta) \to min. \tag{3}$$

Carrying out transformations in (3) we obtain

$$S = Y'Y - \beta' X' Y' - Y' X \beta + \beta' X' X \beta. \tag{4}$$

This implies

$$S = Y'Y - 2\beta' X' Y' + \beta' X' X \beta \to min, \tag{5}$$

where $X'X$ – matrix of sums of first powers, squares and pairwise products n observations of explanatory factors; $X'Y$ – vector of products, dimension n observations of explanatory factors and dependent variables.

The solution of the matrix equation will be the vector

$$\beta = (X'X)^{-1}(X'Y), \tag{6}$$

where $(X'X)^{-1}$ – matrix inverse to the matrix of system coefficients; $X'Y$ – vector, free members of the matrix.

To calculate the operating time of the computing system, y_i acts as the final time, and the explanatory factors indicated by the x_i vector are: the size of the computational grid, the number of computing nodes used. Thus, it seems possible to calculate the average running

*The reported study was funded by RFBR according to the research project 20-31-90105

time of the entire system. On the basis of the presented regression analysis, a graph (Fig. 1) was obtained of the dependence of the running time of a parallel program on the amount of transmitted data and the number of involved computing nodes of a multiprocessor system.

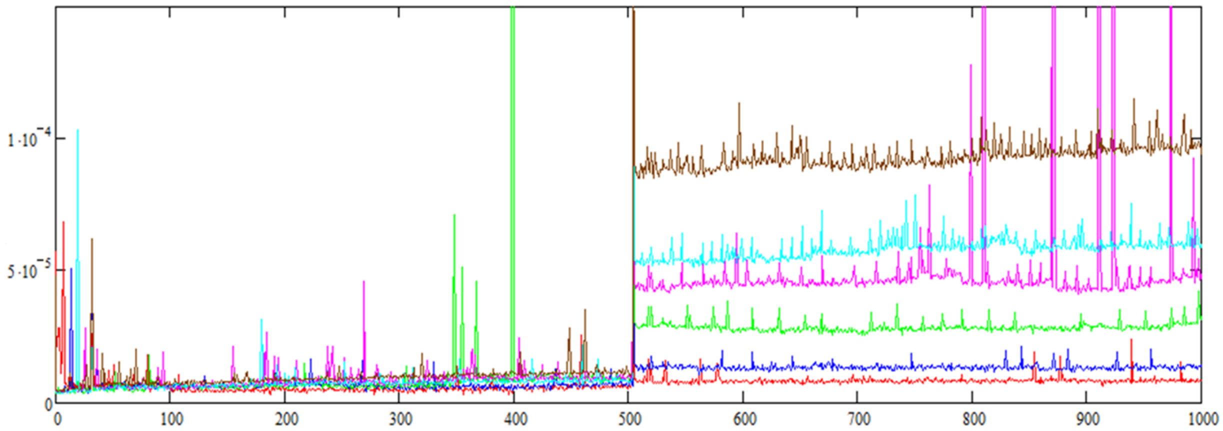

Figure 1 – time dependence on the volume of transmitted data and the number of computing nodes involved.

Latency and data transfer times are calculated using linear regression. The formula for latency is:

$$t_k = \begin{cases} 5.21 \cdot 10^{-6} + 1.53 \cdot 10^{-7} k, \ if \ n \leq 512, \\ 6.733 \cdot 10^{-6} k, \ if \ n > 512, \end{cases} \tag{7}$$

where k – number of nodes. Transmission time per data $t_x = 3.3 \cdot 10^{-9}$.

Regression analysis makes it possible to give a final theoretical estimate of the time of operation of a computing system when parameterizing model data. In the case of developing mathematical models and designing algorithms for the parallel solution of the problem of mathematical modeling of the transfer of pollutants in the aquatic environment, the correlation analysis will make it possible to predict the time for calculating the data.

REFERENCES

1. *Alekseenko, E., Thouvenin B., Tronczynsky J., Carlotti F., Garreau P., Tixier C., Baklouti M.* Modeling of PCB trophic transfer in the Gulf of Lions; 3D coupled model application // Mar Pollut Bull. – 2018. – p.140–155. DOI: 10.1016/j.marpolbul.2018.01.008.

2. *Badenko, V. L.* High-performance computing // St. Petersburg: Publishing House of the Polytechnic University. – 2010. – p. 180

3. *Sukhinov, A. I., Chistyakov, A. E., Shishenya, A. V., Timofeeva, E. F.* Modeling of Coastal Hydrophysical Processes in Multiple-Processor Systems Based on Explicit Schemes // Math. Models Comput. Simul. – 2018. – Vol. 10, Is. 5. – p. 648–658. DOI: 10.1134/S2070048218050125 (*in Russian*)

Cramér type moderate deviations for random fields

Aleksandr Beknazaryan
University of Tyumen
a.beknazaryan@utmn.ru

(joint work with Hailin Sang and Yimin Xiao)

Let $\{X_{nj}, n \in \mathbb{N}, j \in \mathbb{Z}^d\}$ be a random field with zero means defined on a probability space $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Suppose that for each n, there is a disc on the complex plane $\mathbb{C}$ centered at the origin $z = 0$ with a finite radius H_n within which the cumulant generating function $L_{nj}(z) = \log \mathbb{E}e^{zX_{nj}}$ of X_{nj} is analytic and

$$|L_{nj}(z)| \le c_{nj} \quad \text{for all } z \in \mathbb{C} \text{ with } |z| < H_n. \tag{1}$$

Denote

$$S_n = \sum_{j \in \mathbb{Z}^d} X_{nj}, \quad B_n = \sum_{j \in \mathbb{Z}^d} var(X_{nj}), \quad C_n = \sum_{j \in \mathbb{Z}^d} c_{nj}$$

and let

$$F_n(x) = P(S_n < x\sqrt{B_n}).$$

Assume that S_n is well-defined, $B_n < \infty$ for each $n \in \mathbb{N}$, $B_n H_n^2 \to \infty$ as $n \to \infty$ and that $C_n = O(B_n H_n^2)$. Then, denoting by $\Phi(z)$ the cumulative distribution function of standard normal distribution, the following theorem establishes exact moderate deviation for the random filed X_{nj} under Cramér's condition (1):

Theorem If $x \ge 0$ and $x = o(H_n\sqrt{B_n})$, then

$$\frac{1 - F_n(x)}{1 - \Phi(x)} = \exp\left\{\frac{x^3}{H_n\sqrt{B_n}}\lambda_n\Big(\frac{x}{H_n\sqrt{B_n}}\Big)\right\}\left(1 + O\left(\frac{x+1}{H_n\sqrt{B_n}}\right)\right),$$

where

$$\lambda_n(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \beta_{kn} t^k$$

is a power series that stays bounded uniformly in n for sufficiently small values of $|t|$ and the coefficients β_{kn} only depend on the cumulants of X_{nj} $(n \in \mathbb{Z}, j \in \mathbb{Z}^d)$.

Bondarenko D.V., Nikitina A.V. (Don State Technical University, Rostov-on-Don)
Evaluation of the effectiveness of heuristic optimization methods with a random distribution of input data

Define some function $f : R^n \to R$, for which it is necessary to find the extremum points depending on the task, and the search area $S = [s^0_1; s^1_1] \times \ldots \times [s^0_n; s^1_n] \subset R^n$. Next, the initial harmonics $\{h_i \in S\}^k_{i=1}$ are randomly generated in a given area, where k is a value indicating the number of harmonics that can be stored in memory. Let in the algorithm p_c be the probability of choosing from memory harmonics, p_m – the probability of modification and bw is the magnitude of the modification. The iterative part of the algorithm continues until its stop criterion is met. The criterion may be a limitation on the number of iterations, on the number of predictions without updating the harmonics memory, or the proximity of the harmonics being added according to a given metric. When implementing the first step of the iterative part of the algorithm, a new zero harmonic is created $h_{new} = \{0, 0, \ldots, 0\} \in R^n$. Then, for each harmonic component, a random number ϵ is generated, evenly distributed in the interval (0,1). If ϵ is less than p_c, then the corresponding component from a randomly selected harmonic located in memory is written to the current component, otherwise the component is generated randomly, taking into account the belonging of the component from the search area S. If the component was generated using internal or external memory, then it is probably necessary to modify it. To do this, a random number ϵ is generated, again evenly distributed in the interval (0,1). If ϵ is less than p_m, then the component changes by the value $\delta \cdot bw$, where δ is a random variable located on the segment [-1;1]. If $f(h_{new}) < \underset{1 \le i \le k}{max} f(h_i)$, then h_{new} replaces $arg \underset{1 \le i \le k}{max} f(h_i)$. To test the algorithm, the distribution function of the concentration of the pollutant in the reservoir was used [2]:

$$C(x, y) = \begin{cases} sin(\pi(x - 10)/10)sin(\pi(y - 10)/10), (x, y) \in D, \\ 0, (x, y) \notin D, D = \{(x, y) \in R^2 : x \in [10, 20], y \in [10, 20]\}. \end{cases}$$

For the harmonic search method, we set the algorithm stop parameter in the form of a limit on the number of improvisations in the iterative part, equal to 10000. The number of harmonics that can be stored in memory is set to 100. The operating time of the software module implementing the test task in the Python programming language was 0.496674 seconds. The result of the algorithm for the test problem under consideration will be finding the best harmonic [15.000570810442545, 14.99912225607023] with a function value of 0.9999999459017892.

The considered heuristic algorithm is a zero-order method, it is based on harmonics and improvisation of musicians, which greatly simplifies its understanding. Using the idea of modifying a vector with a probabilistic approach makes it possible to reduce the possibility that when finding the extremum points of a function, a closure to its local extremum points will occur.

REFERENCES

1. *Zong Woo Geem* Music-Inspired Harmony Search Algorithm. Studies in Computational Intelligence (SCI, volume 191) DOI:10.1007/978-3-642-00185-7

2. *Atayan, A.M., Nikitina, A.V., Sukhinov, A.I., Chistyakov, A.E.* Mathematical Modeling of Hazardous Natural Phenomena in a Shallow Basin (2022) Computational Mathematics and Mathematical Physics, 62 (2), pp. 269-286.
DOI: 10.31857/S0044466921120048

*The study was financially supported by the Grants Council of the President of the Russian Federation within the framework of the scientific project No. MD-3624.2021.1.1

Chistyakov A. E. (Don State Technical University, Rostov-on-Don), **Kuznetsova I. Y.** (Southern Federal University, Rostov-on-Don) **Stability estimation of the equation for calculating the pressure taking into account the collision time of the medium molecules**

A crucial task is to improve the accuracy of mathematical modeling of natural hazards, including storm surges and the transport of pollutants in a reservoir. In this paper, we propose to consider an approach to constructing a mathematical model of hydrodynamics based on the well-known connection between the kinetic and hydrodynamic descriptions of a continuous medium [1-2]. According to [1], in the case of a spatially one-dimensional layer, the scheme will be constructed under the following assumptions: 1) at the n-th time step in each spatial cell $x \in [x_i, x_{i+1}]$, there is a locally Maxwellian distribution f_{0i} that is constant for this cell

$$f_{0i} = \frac{\rho_i}{(2RP_i)^{3/2}} \exp\left(-\frac{\zeta - U_i}{2RP_i}\right), \tag{1}$$

where ρ is the density of the substance, R is the gas constant, P is the pressure, ζ is the velocity of the molecule, U_i is the macroscopic velocity; 2) during the time $t \in \left[t^n, t^{n+1}\right]$ the particles of the medium perform collisionless expansion; 3) at the *n+1* time step the distribution function f^{n+1}, obtained as a result of the expansion and is not Maxwellian is instantly Maxwellized, and the whole procedure is repeated again.

It is shown in [2] that when solving problems of hydrodynamics, the equation of continuity in the case of taking into account the time of collision of medium molecules takes the form

$$\rho'_t = \tau^* \rho''_{tt} + \nabla(\rho \mathbf{V}), \tag{2}$$

where τ^* h/c is the regularization parameter or the characteristic time between collisions of molecules, h is the computational grid step, c is the speed of sound, $\mathbf{V}$ is the velocity vector of the medium. In an adiabatic process, the speed of sound is determined from the expression: $c = \sqrt{(\partial P/\partial \rho)_S}$, where S is an index showing that the derivative is taken at constant entropy. In equation (2), the term $\tau^* \rho''_{tt}$ arises when the momentum transfer delay is taking into account in the case of representation of the collision time of molecules by a discrete function.

According to [3], the calculation of the pressure function will take the form:

$$\frac{1}{c^2} P''_{tt} - \Delta P = -\frac{\rho'_t + \nabla\left(\rho \tilde{\mathbf{V}}\right)}{\tau}, \tag{3}$$

with initial conditions $P\big|_{t=0} = P_0$, $P'_t\big|_{t=0} = P_1$. Here $\tau = t^{n+1} - t^n$ is the time step, $\tilde{\mathbf{V}}$ is the intermediate velocity field calculated without regard to pressure [4].

Using the Rote method for equation (3), an analytical solution was obtained [5]:

$$P''_{tt} = -\Lambda P, \quad P = \sum_i \alpha_i X_i, \quad \alpha_i(t) = \alpha_{i,0} \cos\left(\sqrt{\lambda_i} t\right) + \frac{\alpha_{i,1}}{\sqrt{\lambda_i}} \sin\left(\sqrt{\lambda_i} t\right), \tag{4}$$

where Λ is a self-adjoint, positive definite operator, X_i are the eigenvectors of the operator Λ forming an orthonormal basis, λ_i are the eigenvalues of the operator Λ, $\Lambda X_i = \lambda_i X_i$.

In general, the system of eigenvectors of the operator is unknown. In practice, equation (3) is solved by numerical methods. Solution (4) is necessary to estimate the approximation error of the numerical solution.

Theorem. The implicit difference scheme approximating the homogeneous equation (3) is absolutely stable, has the first order of accuracy, and the estimation of the calculation error has the form:

---

*The study was financially supported by the Grants Council of the President of the Russian Federation within the framework of the scientific project No. MD-3624.2021.1.1

$$\Psi_i^{n+1} = C^n \Psi_i^1 + \sum_{r=0}^{n-1} C^r \beta_i^{n-r}, \quad \cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{1+k}}, \quad k = \frac{\lambda_i \tau^2}{\tau^*},$$

$$C^n = \left(\frac{1}{1+k} \cos(\varphi n) + \frac{2\sqrt{1+k} \exp\left(-1/\sqrt{1+k}\right) - 1}{k(1+k)} \sin(\varphi n) \right) \exp\left(\frac{n}{\sqrt{1+k}} \right),$$

$$\beta_i^n = \frac{2\alpha_{i,0} \cos\left(\sqrt{\lambda_i} t^n\right) \left(1 - \cos\left(\sqrt{\lambda_i}\tau\right)\right) - \alpha_{i,0} k \cos\left(\sqrt{\lambda_i} t^n + \sqrt{\lambda_i}\tau\right)}{1+k} +$$

$$+ \frac{2\alpha_{i,1} \sin\left(\sqrt{\lambda_i} t^n\right) \left(1 - \cos\left(\sqrt{\lambda_i}\tau\right)\right) - \alpha_{i,1} k \sin\left(\sqrt{\lambda_i} t^n - \sqrt{\lambda_i}\tau\right)}{(1+k)\sqrt{\lambda_i}}.$$

REFERENCES

1. *Chetverushkin, B. N.* Kinetic Shemes and Quasi-Gas Dynamic system of Equations. – CIMNE. – Barcelona, 2008. – 298 p.

2. *Chetverushkin, B. N.* Resolution limits of continuous media models and their mathematical formulations // Math. Models Comput. Simul. – 2013. – Vol. 5, Is. 3. – p. 266–279. DOI: 10.1134/S2070048213030034

3. *Sukhinov, A. I., Chistyakov, A. E., Kuznetsova I. Yu., Atayan, A. M., Nikitina, A. V.* Regularized difference scheme for solving hydrodynamic problems // Math. Models Comput. Simul. – 2022. – Vol. 34, Is. 2. – p. 85–100. DOI: 10.20948/mm-2022-02-07 (*in Russian*)

4. *Belotserkovskii, O. M., Gushchin, V. A., Konshin, V. N.* The splitting method for investigating flows of a stratified liquid with a free surface // Comput. Math. Math. Phys. – 1987. – Vol. 27, Is. 2. – p. 181–191.

5. *Sukhinov, A. I., Chistyakov, A. E.* Error solving the wave equation based on the scheme with weights // Math. Models Comput. Simul. – 2017. – Vol. 9, Is. 6. – p. 649–656. DOI: 10.1134/S2070048217060126

On some Wald type identities for Fractional Brownian motions

Manuel L. Esquível and Nadezhda P. Krasii

May 17, 2022

Abstract

In 2017 A. N. Shiryaev asked us the following question: is there analogs of the Wald identities for the fractional Brownian motions? We believe so by reason of the following. There are series representation with Schauder functions—or similar functions—of all Brownian motions, usual and fractional; these series representations are obtained via the Haar basis and all have some remarkable characteristic: localisation of the random components. This characteristic lead us to believe that any property of the usual Brownian motion relying on this localisation feature may be extended, with adequate adaptations, to all fractional Brownian motions. This is the approach that subsumes the present work.

Let $(B_t^H)_{t\geq 0}$ the self similar process *fractional Brownian motion* for $0 < H < 1$.

$$B_t^H := C_H \left(\int_{-\infty}^{0} \left((t-u)^{H-1/2} - (-u)^{H-1/2} \right) dB_u + \int_0^t (t-u)^{H-1/2}\, dB_u \right) ,$$

with,

$$C_H = \mathbb{E}\left[B_1^H\right]^{-\frac{1}{2}} \left(\int_{-\infty}^{0} \left((t-u)^{H-1/2} - (-u)^{H-1/2} \right)^2 du + \frac{1}{2H} \right)^{-\frac{1}{2}} ,$$

where $(B_t)_{t\geq 0}$ is an usual Brownian process and the integrals must be given a special interpretation. We observe that there is a decomposition of this process, as the sum of two processes, $(1/C_H)B_t^H = R_t^H + M_t^H$ with,

$$R_t^H := \int_0^t (t-u)^{H-1/2}\, dB_u ,$$

and, *the long memory process* given by $M_0^H := 0$ and,

$$M_t^H := \int_0^{+\infty} \left((t+u)^{H-1/2} - u^{H-1/2} \right) d\widetilde{B}_u ,$$

$(\widetilde{B}_t)_{t\geq 0}$ being an independent copy of $(B_t)_{t\geq 0}$. We will treat the two processes separately. We have, with $\{\xi_0, \xi_{j,k} : j = 0, 1, \ldots, +\infty; k = 0, \ldots 2^j - 1\}$ in $\mathcal{H}$, a set of orthonormal random variables in $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, that:

$$R_t^H = \xi_0 \frac{2t^{H+1/2}}{1+2H} + \sum_{j=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{2^j-1} \xi_{j,k} \varphi_{j,k}^H(t) ,$$

with an analog of the Schauder *little tent* functions defined by:

$$\varphi_{j,k}^H(t) := \frac{2^{\frac{j}{2}+1}}{1+2H} \left[\left(t - \frac{2k}{2^{j+1}} \right)^{H+\frac{1}{2}} \mathbb{1}_{\left[\frac{2k}{2^{j+1}}, \frac{2k+1}{2^{j+1}}\right[}(t) + \left(\frac{2k+2}{2^{j+1}} - t \right)^{H+\frac{1}{2}} \mathbb{1}_{\left[\frac{2k+1}{2^{j+1}}, \frac{2k+2}{2^{j+1}}\right[}(t) \right] ,$$

peaking with the value $2^{-(2H(j+1)+1)/2}/(1+2H)$ at the point $(2k+1)/2^{j+1}$. And, in the same way, we also have,

$$M_t^H = \xi_0 \frac{2\left(2^{H+1/2} - 2\right)}{1+2H} t^{H+1/2} + \sum_{j=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{2^j-1} \xi_{j,k} \psi_{j,k}^H(t) .$$

Let the filtration $\mathbb{G} = (\mathcal{G}_t)_{t\in[0,1]}$ be defined, for $t > 0$, by:

$$\mathcal{G}_t := \sigma \left(\xi_0, \xi_{j,k}, j = 0, 1, \cdots + \infty;\ k = 0, \ldots 2^j - 1 : s \in \left[\frac{2k}{2^{j+1}}, \frac{2k+2}{2^{j+1}} \right[,\ s \leq t \right) ,$$

and let $\mathcal{G}_0 := \{\emptyset, \Omega\}$. Let τ be a stopping time with respect to $\mathbb{G}$.

Theorem 1 (Wald identity for fBm component R^H)**.** *Let τ be a stopping time with respect to $\mathbb{G}$ such that $\tau < 1$ almost surely. Then,*

$$\mathbb{E}\left[R_\tau^H\right] = \mathbb{E}\left[\xi_0 \frac{2}{1+2H} \tau^{H+1/2}\right] .$$

Theorem 2 (Wald identity for fBm component M^H)**.** *Let τ be a stopping time with respect to $\mathbb{G}$ such that $\tau < 1$ almost surely. Then,*

$$\mathbb{E}\left[M_\tau^H\right] = \mathbb{E}\left[\xi_0 \frac{2\left(2^{H+1/2} - 2\right)}{1+2H} \tau^{H+1/2}\right] .$$

References

[1] Pavel Yaskov. A maximal inequality for fractional brownian motions. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 472(1):11–21, 2019.

On the fractional differential Riccati equation and some new numerical approaches to its solution.

April 30, 2022

Nicola Hu, nkhu@sfedu.ru,
Southern Federal University, Rostov-on-Don.

The following fractional differential equation

$$D^{\alpha}\psi(t) = \lambda\psi^2(t) + \mu\psi(t) + \nu, \quad I_{1-\alpha}\psi = u \in \mathbb{R}, \quad \lambda, \mu, \nu \in \mathbb{R}, \quad \alpha \in (0,1], \tag{1}$$

where $D^{\alpha}\psi(t)$ represents the Riemann-Liouville fractional derivative of ψ of order α in t, is known as fractional differential Riccati equation. It appears in many different problems, as noted in [4]. For example, in the rough Heston model

$$\begin{cases} dS_t = S_t\sqrt{V_t}dW_t, \\ V_t = V_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\left(\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\eta(m - V_s)ds + \int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\eta\zeta\sqrt{V_s}dB_s\right). \end{cases} \tag{2}$$

which describes the dynamics of an asset price S_t and its variance process V_t. It has been shown in [5], that the characteristic function of the log-price S_t is expressed in terms of the solution of a fractional Riccati equation (2).

The fractional Riccati equation has a non-trivial solution. Some numerical approaches in solving the fractional Riccati have been elaborated. For example, through the Adomian's decomposition and the homotopy perturbation method (see [6] and references there inside). We will discuss a new approach from [1] based on the fractional power series expansion of the solution. Moreover, In recent times, Neural Networks have gained popularity, since they can be used as universal approximators of continuous functions in an interval $I \subset \mathbb{R}$ (see Universal Approximation Theorem for Neural Networks [3]). They have been used with great success in solving differential equations (ref. [2]). We will use them in the approximation of the solution to the fractional Riccati.

The general and flexible nature of Neural Networks suggests that can find applications in other problems, for example solving other fractional differential equations, which in recent times find various applications in modeling natural phenomena (ref. [4]).

References

[1] Callegaro G., Grasselli M., Pagès G. *Fast Hybrid Schemes for Fractional Riccati Equations (Rough is not so Tough)*, Mathematics of Operations Research, Vol. 46, 221-254, 2021

[2] Lagaris I. E., Likas A., Fotiadis D. I., *Artificial Neural Networks for Solving Ordinary and Partial Differential Equations* IEEE Transactions On Neural Networks, vol. 9, nr. 5, p. 989-1000, September 1998

[3] Hassoun M., *Fundamentals of Artificial Neural Networks*, MIT Press 1995

[4] Tverdyi D., Parovik R. *Application of the Fractional Riccati Equation for Mathematical Modeling of Dynamic Processes with Saturation and Memory Effect.* Fractal and Fractional 2022, 6, 163

[5] El Euch O., Rosenbaum M. *The characteristic function of rough Heston models.*. Mathematical Finance, 29(1):3–38, (2019).

[6] Rahimkhani P., Ordokhani Y., Babolian E. *Application of fractional-order Bernoulli functions for solving fractional Riccati differential equation.* Int. J. Nonlinear Anal. Appl. 8 (2017) No. 2, 277-292.

A. V. Kolnogorov

POISSONIAN TWO-ARMED BANDIT: BAYESIAN APPROACH[1]

We consider a Bayesian approach to a continuous time two-armed bandit problem, in which incomes are described by poissonian processes. The problem is studied in a discrete approximation. To do this, a control horizon is divided into equal consequtive half-intervals, at which the strategy remains piece-wise constant and incomes arise in batches corresponding to these half-intervals. For finding the piece-wise constant Bayesian strategy and corresponding Bayesian risk, a recursive difference equation is obtained. In the limiting case as the number of half-intervals grows infinitely, the existence of a limiting value of the Bayesian risk is established and a partial differential equation for its determining is derived.

We consider a Bayesian approach to poissonian two-armed bandit, which is different from presented in [1]. Poissonian two-armed bandit is a right-continuous jump-like controlled random process $\{X(t), 0 \le t \le T\}$, which values are interpreted as incomes increasing by one at the time points of jumps. A control is carried out using two actions. Let's use a notation $y((t, t+\varepsilon]) = \ell$ if on the half-interval $t' \in (t, t+\varepsilon]$, $\varepsilon > 0$ the action $y(t') = \ell$ was permanently used ($\ell = 1, 2$). If this permanent control is used then increments of the process $X(t)$ depend on chosen actions as follows

$$\Pr\left(X(t+\varepsilon) - X(t) = i | y((t, t+\varepsilon]) = \ell\right) = p(i, \varepsilon; \lambda_\ell) = \frac{(\lambda_\ell \varepsilon)^i}{i!} e^{-\lambda_\ell \varepsilon},$$

$i = 0, 1, 2, \ldots$; $\ell = 1, 2$. The value $X(t+\varepsilon) - X(t)$ is interpreted as a batch of incomes obtained on the half-interval $(t, t+\varepsilon]$. So, a vector parameter $\theta = (\lambda_1, \lambda_2)$, where λ_1, λ_2 are intensities of incomes' generation, completely describes poissonian two-armed bandit. The set Θ of admissible values of parameter is assumed to be known.

For a control, piece-wise constant strategies are used. At the start of the control both actions are used on the half-intervals of the length t_0. Then a control horizon is divided into equal half-intervals of the length ε, on which the actions remain constant. A control strategy σ at the point of time t, corresponding to the start of the current half-interval, determines a choice (generally speaking, a random) of the action $y((t, t+\varepsilon])$ depending on the known history (X_1, t_1, X_2, t_2).

[1]Supported by RFBR, project number 20-01-00062.

Here t_1, t_2 are current cumulative times of both actions applications ($t_1 + t_2 = t$) and X_1, X_2 are corresponding cumulative incomes.

Let's denote by $X_1(t), X_2(t)$ the current values of incomes at the point of time t. If the values of intensities λ_1, λ_2 were known, one should always choose the action corresponding to the largest of them, the total expected income on the control horizon T is thus $T\max(\lambda_1, \lambda_2)$. The actual expected income is less then the maximal one by the value $L_{\varepsilon,T}(\sigma,\theta) = T\max(\lambda_1,\lambda_2) - \mathbf{E}_{\sigma,\theta}\left(X_1(T) + X_2(T)\right)$, which is called the regret. By $\mathbf{E}_{\sigma,\theta}$ we denote the mathematical expectation computed over the measure generated by the strategy σ and the parameter θ. Here and below the index ε highlights the usage of piece-wise constant strategies. Let's assign a prior distribution density $\mu(\theta) = \mu(\lambda_1, \lambda_2)$ on the set Θ. Bayesian risk computed with respect to a prior distribution density $\mu(\theta)$ is

$$R^B_{\varepsilon,T}(\mu) = \inf_{\{\sigma\}} \int\limits_{\Theta} L_T(\sigma,\mu)\mu(\theta)d\theta, \tag{1}$$

corresponding optimal strategy is called a Bayesian strategy.

Theorem 1. *Consider a recursive difference equation*

$$R_\varepsilon(X_1,t_1,X_2,t_2) = \min(R^{(1)}_\varepsilon(X_1,t_1,X_2,t_2), R^{(2)}_\varepsilon(X_1,t_1,X_2,t_2)), \tag{2}$$

where

$$R^{(1)}_\varepsilon(X_1,t_1,X_2,t_2) = R^{(2)}_\varepsilon(X_1,t_1,X_2,t_2) = 0, \tag{3}$$

if $t_1 + t_2 = T$ *and then*

$$\begin{aligned} R^{(1)}_\varepsilon(X_1,t_1,X_2,t_2) &= \varepsilon g^{(1)}(X_1,t_1,X_2,t_2) + \mathbf{T}^{(1)}_\varepsilon R_\varepsilon(X_1,t_1+\varepsilon,X_2,t_2), \\ R^{(2)}_\varepsilon(X_1,t_1,X_2,t_2) &= \varepsilon g^{(2)}(X_1,t_1,X_2,t_2) + \mathbf{T}^{(2)}_\varepsilon R_\varepsilon(X_1,t_1,X_2,t_2+\varepsilon) \end{aligned} \tag{4}$$

if $2t_0 \le t < T$. *Here functions* $\{g^{(\ell)}(X_1,t_1,X_2,t_2)\}$ *and operators* $\{\mathbf{T}^{(\ell)}_\varepsilon\}$ *are as follows*

$$\begin{aligned} g^{(1)}(X_1,t_1,X_2,t_2) &= \iint\limits_{\Theta} (\lambda_2-\lambda_1)^+ \lambda_1^{X_1} e^{-\lambda_1 t_1} \lambda_2^{X_2} e^{-\lambda_2 t_2} \mu(\lambda_1,\lambda_2) d\lambda_1 d\lambda_2, \\ g^{(2)}(X_1,t_1,X_2,t_2) &= \iint\limits_{\Theta} (\lambda_1-\lambda_2)^+ \lambda_1^{X_1} e^{-\lambda_1 t_1} \lambda_2^{X_2} e^{-\lambda_2 t_2} \mu(\lambda_1,\lambda_2) d\lambda_1 d\lambda_2, \\ \mathbf{T}^{(1)}_\varepsilon F(X_1,t_1,X_2,t_2) &= \sum_{j=0}^{\infty} F(X_1+j,t_1,X_2,t_2) \times \frac{\varepsilon^j}{j!}, \\ \mathbf{T}^{(2)}_\varepsilon F(X_1,t_1,X_2,t_2) &= \sum_{j=0}^{\infty} F(X_1,t_1,X_2+j,t_2) \times \frac{\varepsilon^j}{j!}. \end{aligned} \tag{5}$$

Bayesian strategy prescribes to choose the ℓth action (i.e., $\sigma_\ell(X_1,t_1,X_2,t_2) = 1$) if $R_\varepsilon^{(\ell)}(X_1,t_1,X_2,t_2)$ has the smaller value ($\ell = 1,2$). In the case of a draw $R_\varepsilon^{(1)}(X_1,t_1,X_2,t_2) = R_\varepsilon^{(2)}(X_1,t_1,X_2,t_2)$, the choice of the action is arbitrary. Bayesian risk (1) *is*

$$R_{\varepsilon,T}(\mu) = t_0 \iint\limits_{\Theta} |\lambda_1 - \lambda_2| \mu(\lambda_1,\lambda_2) d\lambda_1 d\lambda_2 + \sum_{X_1=0}^{\infty} \sum_{X_2=0}^{\infty} R_\varepsilon(X_1,t_0,X_2,t_0) \frac{t_0^{X_1} t_0^{X_2}}{X_1! X_2!}, \tag{6}$$

and, in particular, $R_{\varepsilon,T}(\mu) = R_\varepsilon(0,0,0,0)$ *if* $t_0 = 0$.

In what follows, let's assume that $\varepsilon \to 0$. From (2)–(6) the theorem follows.

Theorem 2. *A limit $R(X_1,t_1,X_2,t_2) = \lim_{\varepsilon\to+0} R_\varepsilon(X_1,t_1,X_2,t_2)$ exists if $t_1 \geq t_0$, $t_2 \geq t_0$. This limit is bounded and satisfies Lipschitz conditions for t_1, t_2. A limiting Bayesian risk* (1) *is*

$$R_T(\mu) = \lim_{t_0\to+0,\, \varepsilon\to+0} R_{\varepsilon,T}(\mu) = \lim_{t_0\to+0} R(0,t_0,0,t_0). \tag{7}$$

A limit $R(X_1,t_1,X_2,t_2)$ satisfies partial differential equation

$$\begin{aligned} \min\Bigg(& \frac{\partial R}{\partial t_1} + R(X_1+1,t_1,X_2,t_2) + g^{(1)}(X_1,t_1,X_2,t_2), \\ & \frac{\partial R}{\partial t_2} + R(X_1,t_1,X_2+1,t_2) + g^{(2)}(X_1,t_1,X_2,t_2)\Bigg) = 0 \end{aligned} \tag{8}$$

with initial condition $R(X_1,t_1,X_2,t_2) = 0$ at $t_1 + t_2 = T$. A limiting Bayesian risk (1) is computed according to (7). Differential equation (8) describes at the same time the evolution of the Bayesian risk $R(X_1,t_1,X_2,t_2)$ and also the Bayesian strategy, which prescribes to choose the ℓth action if the ℓth term on the left-hand side of (8) has the smaller value; in the case of a draw the choice of the action can be arbitrary.

[1] Presman, E.L. and Sonin, I.M. *Sequential Control with Incomplete Information*, New York: Academic, 1990.

Pricing double barrier options under Lévy processes of unbounded variation

Oleg Kudryavtsev[a,b,*]

[a]*Russian Customs Academy, Rostov branch, Rostov-on-Don, Russian Federation*
[b]*Southern Federal University, Rostov-on-Don, Russian Federation*

Keywords: Wiener-Hopf factorization, Lévy processes, Numerical methods, Option pricing

The most popular path-dependent options are barrier options, which include double barrier options. Let a stochastic process S_t be a model for the chosen stock price dynamics. Recall that a double barrier option on the stock is a contract which pays the specified amount $G(S_T)$ at the terminal date T, provided during its lifetime, the price of the stock does not cross specified constant barriers D from above and U from below. When at least one of the barriers is crossed, the option expires worthless, or the option owner is entitled to some *rebate*.

From a probabilistic viewpoint, one can express double barrier option prices in terms of conditional expectation on a payoff function that depends on the underlying stochastic process and its extrema. Notice that the known results on pricing double barrier options are rather limited. In analytical terms, the option pricing problem under consideration leads to a matrix Wiener-Hopf factorization (see details in [3]), which is not analytically available yet. To treat the problem in general case numerically, one should apply the Laplace transform (or the Carr's randomization), then solve two coupled complex integrodifferential equations that require complicated approximate formulas for the Wiener-Hopf factors. The overview of the existing numerical methods can be found in [2, 5, 6, 8, 11, 9, 12, 10]. Therefore, pricing double barrier options in exponential Lévy models remains a computational challenge.

In the paper [10], the author suggested a new approach for pricing exotic options with a payoff depending on the infimum and supremum of Lévy processes at expiry. The method suggested makes it easy to implement such a sophisticated tool as the Wiener-Hopf factorization for general Lévy models with jumps of finite variation. The goal of the current paper is to extend the approach from [10] to pure non-Gaussian Lévy processes with jumps of unbounded variation. The main advantage of the method is applying semi-explicit Wiener-Hopf factorization formulas.

A Lévy process is a stochastically continuous process with stationary independent increments (for general definitions, see, e.g., [4]). A Lévy model may have a Gaussian component and pure jump component. A Lévy process X_t can be completely specified by its characteristic exponent, ψ, definable from the equality $E[e^{i\xi X(t)}] = e^{-t\psi(\xi)}$ (we confine ourselves to the one-dimensional case).

The Lévy-Khintchine formula gives the characteristic exponent of a pure non-Gaussian Lévy process:

$$-i\gamma\xi + \int_{\mathbf{R}} (1 - e^{i\xi x} + i\xi x \mathbf{1}_{[-1,1]}(x))\Pi(dx), \tag{1}$$

where $\gamma \in \mathbf{R}$ is the drift, $\mathbf{1}_A$ is the indicator function of the set A, and the Lévy measure $\Pi(dx)$

*Corresponding author
Email address: `koe@donrta.ru` (Oleg Kudryavtsev)

satisfies $\int_{\mathbf{R}} \min\{1, x^2\}\Pi(dx) < +\infty$. If the condition

$$\int_{\mathbf{R}} \min\{1, |x|\}\Pi(dx) < +\infty. \tag{2}$$

does not hold, then the Lévy process X_t is of unbounded variation.

Let T, K, D, U be the maturity, strike, the lower barrier, and the upper barrier, and the stock price $S_t = De^{X_t}$ be an exponential Lévy process under a chosen risk-neutral measure which is pure non-Gaussian with jumps of unbounded variation. Without loss of generality, we confine ourselves to a double barrier put option. Set the riskless rate and the dividend rate equal to r and d, respectively. We consider an approach to pricing continuously monitored double barrier put options without rebate under a Lévy process with the characteristic exponent (1) that does not satisfies (2).

Let us introduce $h = \ln U/D$. Then the payoff at maturity is $\mathbf{1}_{(0,h)}(X_T)G(X_T)$, where $G(x) = (K - De^x)_+$, and the no-arbitrage price of the double barrier put option at the beginning of a period under consideration ($t = 0$) and $X_t = x$ with $x \in (0, h)$ given by

$$V(T, x) = E^x \left[e^{-rT} \mathbf{1}_{\underline{X}_T > 0} \mathbf{1}_{\overline{X}_T < h} G(X_T) \right], \tag{3}$$

where T is the final date, $\underline{X}_t = \inf_{0 \le s \le t} X_t$ and $\overline{X}_t = \sup_{0 \le s \le t} X_t$ are the infimum and the supremum of the process X_t, respectively. The short-hand notation $E^x[\cdot]$ means that we take the expectation conditioned on the event $X_0 = \underline{X}_0 = \overline{X}_0 = x$.

Theorem 1. *Let N be a sufficiently large natural number. Set $q = T/N$, $v_0(q, x) = G(x)\mathbf{1}_{(0,h)}(x)$, and for $n = 1, 2, \ldots$ define*

$$v_n(q, x) = E^x \left[\frac{v_{n-1}(q, X_{T_{q+r}})}{(1 + r/q)} \mathbf{1}_{\underline{X}_{T_{q+r}} > 0} \mathbf{1}_{\overline{X}_{T_{q+r}} < h} \right], \tag{4}$$

where the random time $T_{q+r} \sim \mathrm{Exp}\,(q + r)$.

For a fixed x, $v_N(N/T, x)$ converges to $V(T, x)$ as $N \to +\infty$.

We prove Theorem 1 by using Laplace transform techniques and Post-Widder approximate formula. Thus, we need a method to compute efficiently the right hand side of (4).

The new approach to calculating (4) requires the following steps. The key idea behind the method is to represent the process X_t as the sum of spectrally positive jumps X_t^+ with a non-negative drift and spectrally negative jumps X_t^- with a non-positive drift: $X_t = X_t^+ + X_t^-$.

Let $X_t^{+,1}$ and $X_t^{+,2}$ be Lévy processes with the same characteristic exponent, i.e. $X_t^{+,1} \sim X_t^+$ and $X_t^{+,2} \sim X_t^+$. Due to the property of increments of a Lévy process to be stationary independent and characteristics of the supremum and infimum processes, we conclude that X_t and $Y_t(= \underline{X}_{t/2}^{+,1} + \overline{X}_{t/2}^{+,1} + \overline{X}_t^- + \underline{X}_t^- + \underline{X}_{t/2}^{+,2} + \overline{X}_{t/2}^{+,2})$ are identically distributed.

Let a natural number N be sufficiently large and $q = N/T$. Since the randomized time T_{q+r} converges in mean square sense to 0 as $N \to +\infty$, we may approximate $X_{T_{q+r}}$ in (4) with $Y_{T_{q+r}}$. Notice that $T_{q+r}/2$ is also an exponentially distributed random variable but with the intensity parameter equal to $2(q + r)$. We show that $X_{T_{2(q+r)}}^+$ and $X_{T_{q+r}}^-$ admit semi-explicit Wiener-Hopf factorizations.

Theorem 2. *Let $q > 0$ be sufficiently large. Then for a fixed $\xi \in \mathbf{R}$*

$$E[e^{i\xi X(T_q)}] - E[e^{i\xi Y(T_q)}] \sim O(q^{-2}) \text{ as } q \to +\infty.$$

Based on Theorem 2 we suggest the following numerical procedure for computation of (4).

Theorem 3. *Let a natural number N be sufficiently large and $q = N/T$. Introduce the following operators:*

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_+^+ u(x) &= E[u(x + \overline{X}^+_{T_{q+r/2}})],\ \mathcal{E}_-^+ u(x) = E[u(x + \overline{X}^-_{T_{q+r}})];\\ \mathcal{E}_+^- u(x) &= E^x[u(\underline{X}^+_{T_{q+r/2}})],\ \mathcal{E}_-^- u(x) = E^x[u(\underline{X}^-_{T_{q+r}})].\end{aligned}$$

One may approximate $v_n(q,x)$ in (4) as follows:

$$v_n(q,x) = \frac{\mathbf{1}_{(0,h)}(x)}{(1+r/q)} \mathcal{E}_-^+ \mathbf{1}_{(0,h)} \mathcal{E}_+^+ \mathcal{E}_-^+ \mathbf{1}_{(0,h)} \mathcal{E}_-^- \mathcal{E}_+^- \mathbf{1}_{(0,h)} \mathcal{E}_+^+ v_{n-1}(q,x) + O(q^{-2}) \text{ as } q \to +\infty.$$

The operators $\mathcal{E}_+^+$, $\mathcal{E}_-^+$, $\mathcal{E}_+^-$ and $\mathcal{E}_-^-$ can be efficiently implemented by using the Fast Fourier Transform (FFT) for real-valued functions (see e.g. [11]).

In the paper, we suggested a new approach for pricing exotic options with a payoff depending on the infimum and supremum of Lévy processes at expiry. The method suggested makes it easy to implement such a sophisticated tool as the Wiener-Hopf factorization for general Lévy models with jumps of unbounded variation.

References

[1] S.I. Boyarchenko, S.Z. Levendorskiĭ, Non-Gaussian Merton-Black-Scholes Theory, World Scientific Publishing Co., 2002.

[2] M. Boyarchenko, S. Levendorskiĭ, Valuation of Continuously Monitored Double Barrier Options and Related Securities, Mathematical Finance 21 (2011).

[3] A. Böttcher, Yu. I. Karlovich, I. M. Spitkovsky, Convolution Operators and Factorization of Almost Periodic Matrix Functions, Operator Theory: Advances and Applications, vol.131, Birkhäuser Verlag, 2002.

[4] R. Cont, P. Tankov, Financial Modelling With Jump Processes, 2nd ed., Chapman & Hall/CRC, 2008.

[5] E. Eberlein Fourier-Based Valuation Methods in Mathematical Finance. In: Benth F., Kholodnyi V., Laurence P. (eds) Quantitative Energy Finance. Springer, 2014.

[6] Hieber, P.: Pricing Exotic Options in a Regime Switching Economy: a Fourier Transform Method, Review of Derivatives Research 21 (2018) 231–252.

[7] A. Itkin, Pricing Derivatives Under Levy Models, Birkhauser, 2017.

[8] J. L. Kirkby, Robust Option Pricing With Characteristic Functions and the B-spline Order of Density Projection, Journal of Computational Finance 21 (2017) 61-100.

[9] O. E. Kudryavtsev, Approximate Wiener–Hopf Factorization and Monte Carlo Methods for Leŕy Processes, Theory of Probability & Its Applications 64 (2019) 186–208.

[10] O. Kudryavtsev, A Simple Wiener-Hopf Factorization Approach for Pricing Double-Barrier Options, Springer Proceedings in Mathematics and Statistics 358 (2021) 273–291.

[11] O. Kudryavtsev, S. Levendorskiĭ, Fast and Accurate Pricing of Barrier Options Under Lévy Processes, Finance and Stochastics 13 (2009) 531–562.

[12] C. E. Phelan, D. Marazzina, G. Fusai, G. Germano, Fluctuation Identities with Continuous Monitoring and Their Application to Price Barrier Options, European Journal of Operational Research 271 (2018) 210-223.

A new approach to the series expansion of iterated Stratonovich stochastic integrals of arbitrary multiplicity with respect to components of the multidimensional Wiener process

Dmitriy F. Kuznetsov
Peter the Great Saint-Petersburg Polytechnic University, Russia
E-mail: sde_kuznetsov@inbox.ru

The work is devoted to a new approach to the series expansion of iterated Stratonovich stochastic integrals with respect to components of the multidimensional Wiener process. This approach is based on multiple Fourier–Legendre series as well as multiple trigonometric Fourier series. The theorem on the mean-square convergent expansion for the iterated Stratonovich stochastic integrals of arbitrary multiplicity is formulated and proved under the condition of convergence of trace series. This condition has been verified for integrals of multiplicities 2 to 5 and complete orthonormal systems of Legendre polynomials and trigonometric functions in Hilbert space. The Hu–Meyer formula [1] and multiple Wiener–Itô stochastic integral [2] were used in the proof of the mentioned theorem. The rate of mean-square convergence of the obtained expansions is found. The mentioned results can be applied to the numerical integration of Itô stochastic differential equations with non-commutative noise in the framework of the approach based on the Taylor–Stratonovich expansion.

Let $(\Omega,\ \mathrm{F},\ \mathsf{P})$ be a complete probability space, let $\{\mathrm{F}_\tau, \tau \in [0,T]\}$ be a nondecreasing right-continous family of σ-algebras of F, and let $\mathbf{W}_\tau$ be a standard m-dimensional Wiener stochastic process, which is F_τ-measurable for any $\tau \in [0,T]$. We assume that the components $\mathbf{W}_\tau^{(i)}$ $(i = 1,\ldots,m)$ of this process are independent.

Consider the unordered set $\{1,2,\ldots,k\}$ and separate it into two parts: the first part consists of r unordered pairs (sequence order of these pairs is also unimportant) and the second one consists of the remaining $k-2r$ numbers. So, we have

$$(\{\underbrace{\{g_1,g_2\},\ldots,\{g_{2r-1},g_{2r}\}}_{\text{part 1}}\},\{\underbrace{q_1,\ldots,q_{k-2r}}_{\text{part 2}}\}), \tag{1}$$

where $\{g_1,g_2,\ldots,g_{2r-1},g_{2r},q_1,\ldots,q_{k-2r}\}=\{1,2,\ldots,k\}$, braces mean an unordered set, and parentheses mean an ordered set.

Consider the Fourier coefficient

$$C_{j_k\ldots j_1}=\int\limits_t^T\psi_k(t_k)\phi_{j_k}(t_k)\ldots\int\limits_t^{t_2}\psi_1(t_1)\phi_{j_1}(t_1)dt_1\ldots dt_k \tag{2}$$

corresponding to the function $K(t_1,\ldots,t_k)=\psi_1(t_1)\ldots\psi_k(t_k)\mathbf{1}_{\{t_1<\ldots<t_k\}}$, $t_1,\ldots,t_k\in[t,T]$, $k\ge 2$ and $K(t_1)=\psi_1(t_1)$, $t_1\in[t,T]$. Here $\psi_1(\tau),\ldots,\psi_k(\tau):[t,T]\to\mathbb{R}$ are nonrandom functions, $\{\phi_j(x)\}_{j=0}^{\infty}$ is a complete orthonormal system of functions in the space $L_2([t,T])$, $j_1,\ldots,j_k=0,1,\ldots$, $\mathbf{1}_A$ denotes the indicator of the set A. At that we suppose $\phi_0(x)=1/\sqrt{T-t}$. Here and further, we assume that $0\le t<T<\infty$.

Denote

$$C_{j_k\ldots j_{l+1}j_lj_lj_{l-2}\ldots j_1}\Biggr|_{(j_lj_l)\frown(\cdot)}\stackrel{\mathsf{def}}{=}\int\limits_t^T\psi_k(t_k)\phi_{j_k}(t_k)\ldots\int\limits_t^{t_{l+2}}\psi_{l+1}(t_{l+1})\phi_{j_{l+1}}(t_{l+1})\int\limits_t^{t_{l+1}}\psi_l(t_l)\psi_{l-1}(t_l)\times$$

$$\times\int\limits_t^{t_l}\psi_{l-2}(t_{l-2})\phi_{j_{l-2}}(t_{l-2})\ldots\int\limits_t^{t_2}\psi_1(t_1)\phi_{j_1}(t_1)dt_1\ldots dt_{l-2}dt_lt_{l+1}\ldots dt_k, \tag{3}$$

i.e. $C_{j_k\ldots j_{l+1}j_lj_lj_{l-2}\ldots j_1}|_{(j_lj_l)\frown(\cdot)}$ is again the Fourier coefficient of type $C_{j_k\ldots j_1}$ but with a new shorter multi-index $j_k\ldots j_{l+1}0j_{l-2}\ldots j_1$ and new weight functions $\psi_1(\tau),\ \ldots,\ \psi_{l-2}(\tau),\ \sqrt{T-t}\psi_{l-1}(\tau)\psi_l(\tau)$,

$\psi_{l+1}(\tau),\ \ldots,\ \psi_k(\tau)$ (also we suppose that $\{l,l-1\}$ is one of the pairs $\{g_1,g_2\},\ldots,\{g_{2r-1},g_{2r}\}$ from the relation (1)).

Denote

$$\bar{C}^{(p)}_{j_k\ldots j_q\ldots j_1}\Biggl|_{q\ne g_1,g_2,\ldots,g_{2r-1},g_{2r}} \stackrel{\sf def}{=} \sum_{j_{g_{2r-1}}=p+1}^{\infty}\ \sum_{j_{g_{2r-3}}=p+1}^{\infty}\ldots\sum_{j_{g_3}=p+1}^{\infty}\ \sum_{j_{g_1}=p+1}^{\infty} C_{j_k\ldots j_1}\Biggl|_{j_{g_1}=j_{g_2},\ldots,j_{g_{2r-1}}=j_{g_{2r}}},$$

$$S_l\left\{\bar{C}^{(p)}_{j_k\ldots j_q\ldots j_1}\Biggl|_{q\ne g_1,g_2,\ldots,g_{2r-1},g_{2r}}\right\} \stackrel{\sf def}{=} \frac{1}{2}\mathbf{1}_{\{g_{2l}=g_{2l-1}+1\}}\sum_{j_{g_{2r-1}}=p+1}^{\infty}\ \sum_{j_{g_{2r-3}}=p+1}^{\infty}\ldots$$

$$\ldots\sum_{j_{g_{2l+1}}=p+1}^{\infty}\ \sum_{j_{g_{2l-3}}=p+1}^{\infty}\ldots\sum_{j_{g_3}=p+1}^{\infty}\ \sum_{j_{g_1}=p+1}^{\infty} C_{j_k\ldots j_1}\Biggl|_{(j_{g_{2l}}j_{g_{2l-1}})\curvearrowright(\cdot),j_{g_1}=j_{g_2},\ldots,j_{g_{2r-1}}=j_{g_{2r}}}.$$

Note that the operation S_l $(l=1,2,\ldots,r)$ acts on the value $\bar{C}^{(p)}_{j_k\ldots j_q\ldots j_1}|_{q\ne g_1,g_2,\ldots,g_{2r-1},g_{2r}}$ as follows: S_l multiplies $\bar{C}^{(p)}_{j_k\ldots j_q\ldots j_1}|_{q\ne g_1,g_2,\ldots,g_{2r-1},g_{2r}}$ by $\mathbf{1}_{\{g_{2l}=g_{2l-1}+1\}}/2$, removes the summation with respect to $j_{g_{2l-1}}$, and replaces $C_{j_k\ldots j_1}|_{j_{g_1}=j_{g_2},\ldots,j_{g_{2r-1}}=j_{g_{2r}}}$ with $C_{j_k\ldots j_1}|_{(j_{g_{2l}}j_{g_{2l-1}})\curvearrowright(\cdot),j_{g_1}=j_{g_2},\ldots,j_{g_{2r-1}}=j_{g_{2r}}}$. At that we write $C_{j_k\ldots j_1}|_{(j_{g_1}j_{g_2})\curvearrowright(\cdot),j_{g_1}=j_{g_2}}=C_{j_k\ldots j_1}|_{(j_{g_1}j_{g_1})\curvearrowright(\cdot),j_{g_1}=j_{g_2}}$.

The action of superposition S_lS_m on $\bar{C}^{(p)}_{j_k\ldots j_q\ldots j_1}|_{q\ne g_1,g_2,\ldots,g_{2r-1},g_{2r}}$ is obvious. For example, for $r=3$

$$S_3S_1\left\{\bar{C}^{(p)}_{j_k\ldots j_q\ldots j_1}\Biggl|_{q\ne g_1,g_2,\ldots,g_5,g_6}\right\}=$$

$$=\frac{1}{2^2}\mathbf{1}_{\{g_6=g_5+1\}}\mathbf{1}_{\{g_2=g_1+1\}}\sum_{j_{g_3}=p+1}^{\infty} C_{j_k\ldots j_1}\Biggl|_{(j_{g_2}j_{g_1})\curvearrowright(\cdot)(j_{g_6}j_{g_5})\curvearrowright(\cdot),j_{g_1}=j_{g_2},j_{g_3}=j_{g_4},j_{g_5}=j_{g_6}}.$$

Theorem 1 [3] (Sect. 2.10). *Assume that the continuously differentiable functions $\psi_l(\tau)$ $(l=1,\ldots,k)$ and the complete orthonormal system $\{\phi_j(x)\}_{j=0}^{\infty}$ of continuous functions $(\phi_0(x)=1/\sqrt{T-t})$ in the space $L_2([t,T])$ are such that the following conditions are satisfied*:

1. *The equality*

$$\frac{1}{2}\int\limits_t^s\Phi_1(\tau)\Phi_2(\tau)d\tau=\sum_{j=0}^{\infty}\int\limits_t^s\Phi_2(\tau)\phi_j(\tau)\int\limits_t^{\tau}\Phi_1(\theta)\phi_j(\theta)d\theta d\tau \tag{4}$$

holds for all $s\in(t,T]$, where the nonrandom functions $\Phi_1(\tau)$, $\Phi_2(\tau)$ are continuously differentiable on $[t,T]$ and the series on the right-hand side of (4) *converges absolutely.*

2. *The estimates*

$$\left|\int\limits_t^s\phi_j(\tau)\Phi_1(\tau)d\tau\right|+\left|\int\limits_s^T\phi_j(\tau)\Phi_2(\tau)d\tau\right|\le\frac{\Psi_1(s)}{j^{1/2+\alpha}},\quad \left|\sum_{j=p+1}^{\infty}\int\limits_t^s\Phi_2(\tau)\phi_j(\tau)\int\limits_t^{\tau}\Phi_1(\theta)\phi_j(\theta)d\theta d\tau\right|\le\frac{\Psi_2(s)}{p^{\beta}}$$

hold for all $s\in(t,T)$ and for some $\alpha,\beta>0$, where $\Phi_1(\tau)$, $\Phi_2(\tau)$ are continuously differentiable nonrandom functions on $[t,T]$, $j,p\in\mathbb{N}$, and

$$\int\limits_t^T\Psi_1^2(\tau)d\tau<\infty,\qquad \int\limits_t^T|\Psi_2(\tau)|d\tau<\infty.$$

3. *The condition*

$$\lim_{p\to\infty}\sum_{\substack{j_1,\ldots,j_q,\ldots,j_k=0\\ q\ne g_1,g_2,\ldots,g_{2r-1},g_{2r}}}^{p}\left(S_{l_1}S_{l_2}\ldots S_{l_d}\left\{\bar{C}^{(p)}_{j_k\ldots j_q\ldots j_1}\Biggl|_{q\ne g_1,g_2,\ldots,g_{2r-1},g_{2r}}\right\}\right)^2=0$$

holds for all possible $g_1, g_2, \ldots, g_{2r-1}, g_{2r}$ (*see* (1)) *and* $l_1, l_2, \ldots, l_d$ *such that* $l_1, l_2, \ldots, l_d \in \{1, 2, \ldots, r\}$, $l_1 > l_2 > \ldots > l_d$, $d = 0, 1, 2, \ldots, r-1$, *where* $r = 1, 2, \ldots, [k/2]$ *and*

$$S_{l_1} S_{l_2} \ldots S_{l_d} \left\{ \bar{C}^{(p)}_{j_k \ldots j_q \ldots j_1} \Bigg|_{q \ne g_1, g_2, \ldots, g_{2r-1}, g_{2r}} \right\} \stackrel{\sf def}{=} \bar{C}^{(p)}_{j_k \ldots j_q \ldots j_1} \Bigg|_{q \ne g_1, g_2, \ldots, g_{2r-1}, g_{2r}} \quad for \quad d = 0.$$

Then, for the iterated Stratonovich stochastic integral of arbitrary multiplicity k

$$J^*[\psi^{(k)}]_{T,t}^{(i_1 \ldots i_k)} = \int\limits_t^T \psi_k(t_k) \ldots \int\limits_t^{t_2} \psi_1(t_1) \circ d\mathbf{W}_{t_1}^{(i_1)} \ldots \circ d\mathbf{W}_{t_k}^{(i_k)} \tag{5}$$

the following expansion

$$J^*[\psi^{(k)}]_{T,t}^{(i_1 \ldots i_k)} = \underset{p \to \infty}{\text{l.i.m.}} \sum_{j_1, \ldots, j_k = 0}^{p} C_{j_k \ldots j_1} \zeta_{j_1}^{(i_1)} \ldots \zeta_{j_k}^{(i_k)} \tag{6}$$

that converges in the mean-square sense is valid, where $C_{j_k \ldots j_1}$ *is the Fourier coefficient defined by* (2), l.i.m. *is a limit in the mean-square sense,* $i_1, \ldots, i_k = 0, 1, \ldots, m$,

$$\zeta_j^{(i)} = \int\limits_t^T \phi_j(\tau) d\mathbf{W}_\tau^{(i)}$$

are independent standard Gaussian random variables for various i *or* j (*in the case when* $i \ne 0$), $d\mathbf{W}_\tau^{(i)}$ *and* $\circ d\mathbf{W}_\tau^{(i)}$ $(i = 0, 1, \ldots, m)$ *are Itô and Stratonovich differentials, respectively*; $\mathbf{W}_\tau^{(0)} \stackrel{\sf def}{=} \tau$.

The following theorem is proved [3] on the base of Theorem 1.

Theorem 2 [3] (Sect. 2.11–2.15). *Suppose that* $\{\phi_j(x)\}_{j=0}^{\infty}$ *is a complete orthonormal system of Legendre polynomials or trigonometric functions in the space* $L_2([t, T])$. *Furthermore, let* $\psi_1(\tau), \ldots, \psi_5(\tau)$ *are continuously differentiable nonrandom functions on* $[t, T]$. *Then, for the iterated Stratonovich stochastic integral* $J^*[\psi^{(k)}]_{T,t}^{(i_1 \ldots i_k)}$ $(k = 3, 4, 5)$ *defined by* (5) *the following relations*

$$J^*[\psi^{(k)}]_{T,t}^{(i_1 \ldots i_k)} = \underset{p \to \infty}{\text{l.i.m.}} \sum_{j_1, \ldots, j_k = 0}^{p} C_{j_k \ldots j_1} \zeta_{j_1}^{(i_1)} \ldots \zeta_{j_k}^{(i_k)}, \tag{7}$$

$$\mathsf{M} \left(J^*[\psi^{(k)}]_{T,t}^{(i_1 \ldots i_k)} - \sum_{j_1, \ldots, j_k = 0}^{p} C_{j_k \ldots j_1} \zeta_{j_1}^{(i_1)} \ldots \zeta_{j_k}^{(i_k)} \right)^2 \le \frac{C}{p^{1-\varepsilon}} \tag{8}$$

are fulfilled, where $i_1, \ldots, i_k = 0, 1, \ldots, m$ *in* (7) *and* $i_1, \ldots, i_k = 1, \ldots, m$ *in* (8), *constant* C *is independent of* p, ε *is an arbitrary small positive real number for the case* $k = 4, 5$ (*polynomial case*) *and* $\varepsilon = 0$ *for the case* $k = 3$ (*polynomial and trigonometric cases*) *or for the case* $k = 4, 5$ (*trigonometric case*), $C_{j_k \ldots j_1}$ *is the Fourier coefficient defined by* (2), *another notations are the same as in Theorem* 1.

Note that (7), (8) are also valid for the case $k = 1$ with $\varepsilon = 0$ (see Theorems 1.1, 1.16 and Remark 1.7 [3]). The case $k = 2$ of Theorem 2 as well as some narrow special cases of Theorem 2 for $k = 3, 4$ were considered earlier in [3] (Chapter 2).

An expansion similar to (6) (without estimating the rate of mean-square convergence) was obtained in [4] using a different approach.

The expansion (6) for the narrow particular case $i_1 = \ldots = i_k \ne 0$ can be obtained under the condition of convergence of limiting traces [5] (Theorem 5.1), [6] (Theorem 4.1), [1] (Remark 1.5.7, Proposition 4.1.2) (the definition of limiting traces can be found in [6]).

References

[1] Budhiraja, A. Multiple stochastic integrals and Hilbert space valued traces with applications to asymptotic statistics and non-linear filtering. Ph. D. Thesis, The University of North Caroline at Chapel Hill, 1994, VII+132 pp.

[2] Itô, K. Multiple Wiener integral. J. Math. Soc. Japan, 3, 1 (1951), 157-169.

[3] Kuznetsov D.F. Strong Approximation of Iterated Itô and Stratonovich Stochastic Integrals Based on Generalized Multiple Fourier Series. Application to Numerical Solution of Itô SDEs and Semilinear SPDEs. arXiv:2003.14184v28 [math.PR], 2022, 869 pp. DOI: http://doi.org/10.48550/arXiv.2003.14184

[4] Rybakov K.A. Orthogonal expansion of multiple Stratonovich stochastic integrals. Differencialnie Uravnenia i Protsesy Upravlenia, 4 (2021), 81–115. Available at:
http://diffjournal.spbu.ru/EN/numbers/2021.4/article.1.5.html

[5] Johnson, G.W., Kallianpur, G. Homogeneous chaos, p-forms, scaling and the Feynman integral. Trans. Amer. Math. Soc., 340 (1993), 503-548.

[6] Budhiraja, A., Kallianpur, G. Two results on multiple Stratonovich integrals. Statistica Sinica, 7 (1997), 907-922.

MSC: 74H45, 74K05

Stochastic longitudinal oscillations viscoelastic rope with moving boundaries, taking into account damping forces

V. L. Litvinov (Russia, Samara)
Samara State Technical University,
Moscow State University
e-mail: vladlitvinov@rambler.ru

At present, reliability issues in the design of machines and mechanisms require more and more complete consideration of the dynamic phenomena that take place in the designed objects. The widespread use in technology of mechanical objects with moving boundaries necessitates the development of methods for their calculation. The problem of oscillations of systems with moving boundaries is related to obtaining solutions to integro-differential and partial differential equations in time-variable domains [1-10]. Such tasks are currently not well understood. Their peculiarity is the difficulty in using the known methods of mathematical physics, suitable for problems with fixed boundaries. The complexity of the solutions obtained is explained by the fact that up to now there has not been a sufficiently general approach to the analysis of the features of the dynamics of such systems. In connection with the danger of resonance, the study of forced oscillations is of great importance here. Attempts to investigate this process have been made, but the results obtained are limited mainly by a qualitative description of dynamic phenomena [1–4]. In addition, it is recognized that deterministic modeling of systems cannot be adequate for some types of problems, so it is necessary to switch to probabilistic-statistical, where there are random variables, stochastic fluctuations. When solving here, mainly approximate methods are used [5–9], since obtaining exact solutions is possible only in the simplest cases [10].

If the damping of transverse vibrations is mainly due to the action of external damping forces, then in the case of longitudinal vibrations, the damping is mainly affected by elastic imperfections in the material of the vibrating object [5-10]. The study of viscoelasticity includes the analysis of the stochastic stability of stochastic viscoelastic systems, their reliability, etc. The paper considers stochastic linear longitudinal oscillations of a viscoelastic rope with moving boundaries, taking into account the influence of damping forces. The case of a difference kernel makes it possible to reduce the problem of analyzing a system of stochastic integro-differential equations to the study of a system of stochastic differential equations. To estimate the expansion coefficients, it is proposed to apply the statistical numerical Monte Carlo method [11].

The differential equation describing the longitudinal vibrations of the rope (viscoelasticity is taken into account based on the Voigt hypothesis) has the form [7, 10]

$$U_{tt}(x,t)+2\alpha U_t(x,t)-a^2\left[U_{xx}(x,t)-\int_0^t K(t-\nu)U_{xx}(x,\nu)d\nu+\mu U_{xxt}(x,t)\right]=f(x,t). \qquad (1)$$

Border conditions

$$U(v_0t,t)=0;\ U(v_0t+l_0,t)=0. \qquad (2)$$

Initial conditions

$$U(x,0)=U_1(x); U_t(x,0)=0. \qquad (3)$$

In problem (1) - (3) it is indicated: $U(x,t)$ – longitudinal displacement of the rope point with coordinate x at time t; $a^2 = E/\rho -$ velocity of wave propagation in the rope, $E-$ modulus of elasticity of the rope material, $\rho-$ linear mass density; $\alpha-$ resistance force of the medium acting per unit length of the rope, proportional to the speed of movement; $\mu-$ a small parameter that takes into account viscoelasticity; $v_0 t + l_0-$ the law of motion of the rope boundary; $f(x,t)-$ a function that characterizes an external disturbance; $K(z)-$ relaxation core.

Let's introduce new variables that stop the bounds:

$$\xi = (x - v_0 t)/l_0; \quad \tau = at/l_0; \quad U(x,t) = V(\xi,\tau).$$

After transformations, we get:

$$V_{\tau\tau}(\xi,\tau) - 2vV_{\xi\tau}(\xi,\tau) - (1-v^2)V_{\xi\xi}(\xi,\tau) - 2k_0V_{\xi}(\xi,\tau) + 2k_1V_{\tau}(\xi,\tau) -$$

$$-d\int_{\xi}^{\xi+v\tau} K(-d(\xi-\eta))V_{\xi\xi}(\eta,\frac{1}{v}(\xi-\eta)+\tau)d\eta + \lambda\left(V_{\xi\xi\xi}(\xi,\tau) - \frac{1}{v}V_{\xi\xi\tau}(\xi,\tau)\right) = F(\xi,\tau); \tag{4}$$

$$V(0,\tau) = 0; \ V(1,\tau) = 0; \tag{5}$$

$$V(\xi,0) = V_1(\xi); \ V_{\tau}(\xi,0) = 0. \tag{6}$$

Here $\quad v = \dfrac{v_0}{a}; \quad d = \dfrac{l_0}{v_0}; \quad k_0 = \alpha v l_0; \quad k_1 = \alpha v d; \quad \lambda = \dfrac{\mu}{d}; \quad F(\xi,\tau) = v^2 d^2 f(x,t).$

The function $F(\xi,\tau)$ can be represented as

$$F(\xi,\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n(\tau)\sin(\omega_n\xi), \ \omega_n = \pi n. \tag{7}$$

Theorem 1. The solution to problem (4)–(6) can be given as a string

$$V(\xi,\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} V_n(\tau)\sin(\omega_n\xi). \tag{8}$$

Substituting (7), (8) into (4), after transformations, we obtain the system of equations

$$V_{n_{\tau\tau}}(\tau) + \left(2k_1 + \frac{\lambda}{v}\omega_n^2\right)V_{n_\tau}(\tau) + \omega_n^2(1-v^2)V_n(\tau) + \omega_n^2 d\int_{\xi}^{1} K(-d(\xi-\eta))V_n\left(\frac{1}{v}(\xi-\eta)+\tau\right)d\eta = F_n(\tau) \tag{9}$$

with initial conditions

$$V_n(0) = 2\int_0^1 V_1(\xi)\sin(\omega_n\xi)\,d\xi; \ V_{n_\tau}(0) = 0. \tag{10}$$

We accept the initial conditions and the external load as random, representing the sum of sinusoids with random amplitudes, denoting them $\tilde{V}(\xi)$ and $\tilde{F}(\xi,\tau)$ respectively. In this case, the oscillations will be random, and equations (9) form a system of random integro-differential equations

$$\tilde{V}_{n_{\tau\tau}}(\tau) + \left(2k_1 + \frac{\lambda}{v}\omega_n^2\right)\tilde{V}_{n_\tau}(\tau) + \omega_n^2(1-v^2)\tilde{V}_n(\tau) + \omega_n^2 d\int_{\xi}^{1} K(-d(\xi-\eta))\tilde{V}_n\left(\frac{1}{v}(\xi-\eta)+\tau\right)d\eta = \tilde{F}_n(\tau); \tag{11}$$

$$\tilde{V}_n(0) = 2\int_0^1 \tilde{V}_1(\xi)\sin(\omega_n\xi)\,d\xi; \ \tilde{V}_{n_\tau}(0) = 0. \tag{12}$$

Characteristics of random variables - mathematical expectation, variance and covariance, have the following form:

$$M\left(\tilde{V}(\xi,\tau)\right)=\sum_{n=1}^{\infty}M\left(\tilde{V}_n(\tau)\right)\sin\left(\omega_n\xi\right); \tag{13}$$

$$D\left(\tilde{V}(\xi,\tau)\right)=\sum_{n,k=1}^{\infty}D_{n,k}\left(\tau\right)\sin\left(\omega_n\xi\right)\sin\left(\omega_k\xi\right); \tag{14}$$

$$C\left(\tilde{V}(\xi,\tau,\zeta,\upsilon)\right)=\sum_{n,k=1}^{\infty}C_{n,k}\left(\tau,\upsilon\right)\sin\left(\omega_n\xi\right)\sin\left(\omega_k\zeta\right). \tag{15}$$

To find the characteristics (13) - (15) of stochastic linear longitudinal oscillations of a viscoelastic rope, it is necessary to obtain statistical estimates for the solution of a system of random integro-differential equations (11). To do this, the relaxation kernel $K(z)$ can be taken in exponential form with a random component:

$$K(z,\bar{\beta})=K(z,\bar{b})\Big|_{\bar{b}=\bar{\beta}}=\sum_{j=1}^{N}c_j e^{-\beta_j z}, \tag{16}$$

where $c_j\in R_+$, β_j – is a possible value of a positive random variable b_j.

Denote the dependence of $\tilde{V}(\xi,\tau)$ and $\tilde{V}_n(\tau)$ on the random vector $\bar{b}$ as $\tilde{V}(\xi,\tau,\bar{b})$ and $\tilde{V}_n(\tau,\bar{b})$, respectively. By changing the variable

$$u_{nj}(\tau,\bar{b})=\int_{\xi}^{1}e^{-\beta_j d\eta}\tilde{V}_n\left(\frac{1}{\nu}(\xi-\eta)+\tau\right),\bar{b})d\eta \tag{17}$$

the system of random integro-differential equations (11) is transformed into a system of random differential equations of the form

$$\tilde{V}_{n_{\tau\tau}}(\tau,\bar{b})+\left(2k_1+\frac{\lambda}{\nu}\omega_n^2\right)\tilde{V}_{n_\tau}(\tau,\bar{b})+\omega_n^2(1-\nu^2)\tilde{V}_n(\tau,\bar{b})+\omega_n^2 d\sum_{j=1}^{N}c_j e^{b_j d\tau}\,u_{nj}(\tau,\bar{b})=\tilde{F}_n(\tau). \tag{18}$$

The initial conditions will look like

$$\tilde{V}_n(0,\bar{b})=2\int_0^1\tilde{V}_1(\xi)\sin\left(\omega_n\xi\right)d\xi;\ \tilde{V}_{n_\tau}(0,\bar{b})=0;\ u_{nj}(0,\bar{b})=0. \tag{19}$$

The study of the system (18) - (19) is possible using the statistical numerical Monte Carlo method [11-13].

BIBLIOGRAPHY

1. Savin G.N., Goroshko O.A. Dynamics of a variable length thread // Nauk. dumka, Kiev, 1962, 332 p.
2. Samarin Yu.P. On a nonlinear problem for the wave equation in one-dimensional space // Applied Mathematics and Mechanics. - 1964. - T. 26, V. 3. - P. 77–80.
3. Vesnitsky A.I. Waves in systems with moving boundaries and loads // Fizmatlit, Moscow, 2001, 320 p.
4. Lezhneva A.A. Bending vibrations of a beam of variable length // Izv. Academy of Sciences of the USSR. Rigid Body Mechanics. - 1970. - No. 1. - P. 159-161.
5. Litvinov V.L. Solution of boundary value problems with moving boundaries using an approximate method for constructing solutions of integro-differential equations // Tr. Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences. 2020.Vol. 26, No. 2. P. 188-199.
6. Anisimov V.N., Litvinov V.L. Mathematical models of longitudinal-transverse vibrations of objects with moving boundaries // Vestn. Himself. tech. un-t. Ser. Phys and mat. science, 2015. Vol. 19, No. 2. P. 382-397.

7. Anisimov V.N., Litvinov V.L. Mathematical modeling and study of the resonance properties of mechanical objects with a changing boundary: monograph / V. L. Litvinov, V. N. Anisimov - Samara: Samar. state tech. un – t, 2020. - 100 p.
8. Litvinov V.L., Anisimov V.N. Application of the Kantorovich - Galerkin method for solving boundary value problems with conditions on moving boundaries // Bulletin of the Russian Academy of Sciences. Rigid Body Mechanics. 2018. No. 2. P. 70–77.
9. Litvinov V.L., Anisimov V.N. Transverse vibrations of a rope moving in a longitudinal direction // Bulletin of the Samara Scientific Center of the Russian Academy of Sciences. 2017. T. 19. No. 4. – P.161–165.
10. Litvinov V.L., Anisimov V.N. Mathematical modeling and research of oscillations of one –dimensional mechanical systems with moving boundaries: monograph / V. L. Litvinov, V. N. Anisimov – Samara: Samar. state tech. un–t, 2017 .– 149 p.
11. Elepov B. S., Kronberg A. A., Mikhailov G. A. and Sabelfeld K. K. Solution of boundary value problems by the Monte Carlo method. - Novosibirsk: Nauka, 1980. - 174 p.
12. Ermakov S. M. Monte Carlo Method in Computational Mathematics: An Introductory Course. - St. Petersburg: Nevsky Dialect; M.: BINOM. Knowledge Laboratory, 2009. - 192 pp.
13. Fishman G. S. Monte Carlo. Concepts, Algorithms, and Applications. — SpringerVerlag, 1995 (Corrected 3 rd printing, 1999). — 718 pp.

Litvinov V. N., **Gracheva N. N.**, **Rudenko N. B.** (Don State Technical University, Rostov-on-Don; Azov-Black Sea Engineering Academy, Zernograd, Russia). **Probabilistic estimates for solving grid equations on heterogeneous computing systems.**

Solving problems of mathematical physics using implicit schemes is reduced to solving systems of linear algebraic equations (SLAE) of high dimension (10^9 and more). Placing all the necessary data in RAM and efficient software implementation of the developed numerical methods are possible only with the use of modern high-performance computing systems built on the basis of a heterogeneous architecture. Estimation of the solution time for grid equations is of a probabilistic nature. This is due to the peculiarities of the functioning of complex hardware and software complex in multi-threaded mode and data caching algorithms.

The aim of the study is to determine the functional dependences of the calculation time of the SLAE by the modified alternating-triangular iterative method (MATM) on the dimension of fragments of a uniform three-dimensional computational grid. Research was carried out for the most time-consuming stages of solving grid equations by the MPTM method, including the solution of SLAEs with lower and upper triangular matrices [1].

The first experiment was carried out on the K-60 computing cluster of the Keldysh Institute of Applied Mathematics. As a result, the dependence of the data transfer time between the computing nodes of the cluster T_{nn} on the number of transmitted elements N_{el} is determined

$$T_{nn} = 13.57 + 6.03 \cdot N_{el} \cdot 10^{-3}. \tag{1}$$

The coefficient of determination of the regression equation was 0.8.

In the second experiment, the calculation time for one fragment of the computational grid was measured by the MATM method with a different number of parallel flows. The number of streams varied from 1 to 32. For 32 streams, the statistical characteristics of the experimental data were obtained: the minimum value is 4096 us, the maximum value is 4188 us, the average value is 4143.9 us, the 90th percentile is 4170 us, the variance is $696,29$ us^2, standard deviation is 26.39 us. According to experimental data, the least square deviation was obtained when calculating one fragment by 32 parallel streams, equal to 26.39 us.

As a result of the third experiment, a regression equation was obtained, which makes it possible to determine the calculation time by the MATM method on a graphics accelerator.

$$T_{GPU} = a - b \cdot Y - c \cdot ln(k) - d \cdot ln(Y), \tag{2}$$

where k is the ratio of the number of flows along the Ox axis to the number of flows along the Oz axis, Y - number of grid nodes along the Oy axis. The coefficient of determination was 0.86; $a = 26; b = 0.0002; c = 0.16; d = 0.77$.

Among the results of the study is the following theorem.

Theorem 1. *The calculation time for the step of solving a SLAE with a lower triangular matrix by the MATM is determined by the formula* $T_{matm} = \sum\limits_{s=1}^{N_s} \max(\mathbf{T}_s)$, *where* s, N_s *are the step number and the number of steps of the parallel-pipeline computing process, respectively;* $\mathbf{T}_s$ *- a vector containing the values of the time spent on computing fragments of the computational grid by all calculators at step* s .

REFERENCES

1. *Sukhinov, A.* Computational Aspects of Solving Grid Equations in Heterogeneous Computing Systems / A. Sukhinov, V. Litvinov, A. Chistyakov [et al.] // Lecture Notes in Computer Science. – 2021. – Vol. 12942 LNCS. – P. 166-177. – DOI 10.1007/978-3-030-86359-3_13.

This work was supported by the RSF (project 21-71-20050).

Random regular flows of classical strings

Malyshev V. A., Zamyatin A. A.

The Model Consider the set $X_\infty = X_\infty(N.L)$ of infinite periodic sequences of point particle coordinates on the real axis R

$$... < x_{-1} < x_0 < x_1 < ... < x_{N-1} < x_N < ..., \tag{1}$$

where periodic means that $x_{k+N} = x_k + L$ for any k, some fixed real $L > 0$ and integer $N > 0$. Masses are assumed to be 1.

Each particle collides with some external particle of small mass at random moments of time. Namely, we suppose, that at the random moments $\tau_{k,l}$, where $\tau_{k,1} < \tau_{k,2} < ...\tau_{k,l}...$, $k-$th particle collides with a particle of mass $m < 1$ and velocity u. Let $\sigma_{k,l} = \tau_{k,l+1} - \tau_{k,l} > 0$ be independent exponentially distributed random variables. After a collision the velocity of the particle changes, according to the laws of conservation of momentum and energy, as follows:

$$v(\tau_{k,l}) = bv(\tau_{k,l}-) + (1-b)u, \ b = \frac{1-m}{1+m}$$

We assume that between collisions the dynamics is deterministic and is defined by Newton's equations

$$\ddot{x}_k = \omega^2(x_{k+1} - 2x_k + x_{k-1}) + f_k, \tag{2}$$

with external (driving) forces $f_k \equiv f = const$, and formal interaction potential energy

$$U = \frac{\omega^2}{2}\sum(x_{k+1} - x_k - \frac{L}{N})^2, \tag{3}$$

In periodic case initial conditions (and the dynamics itselth) are in fact finite dimensional - one can assume that at time 0 there are exactly N point particles $0, 1, ..., N-1$ with velocities $v_0(0), ..., v_{N-1}(0)$ coordinates inside $[0, L)$:

$$0 = x_0(0) < x_1(0) < ... < x_{N-1}(0) < x_N(0) = L, \tag{4}$$

Let $x_k^{(N)}(t)$ be the position of $k-$th particle at time t. The defined random process $(x_0^{(N)}(t), x_1^{(N)}(t), ..., x_{N-1}^{(N)}(t))$ is a piecewise-deterministic continuous time Markov process with trajectories continuous from the right.

Let $\omega = \omega_0 N$. We shall assume, that $\varepsilon = E\sigma_{1,1} \to 0$, such that $\frac{2m}{\varepsilon} \to \alpha > 0$ for some constant α and $\varepsilon N \to 0$.

Regularity conditions We call the dynamics **regular** (without collisions) if it cannot occur that $x_{k+1}(t) = x_k(t)$ for some k and $t \geq 0$. In regular dynamics the order of particles is conserved. We shall say that periodic initial conditions have "almost smooth profiles" if the following two conditions hold:

1) there exist smooth enough periodic functions $X(x), V(x))$ with period L, where $X(x) > 0$ for any $x \in R$, and

$$\int_0^L X(u)du = L, \ \int_0^L V(u)du = 0 \tag{5}$$

2) for some constants $C_1 > 0, C_2 > 0$

$$|x_{k+1}^{(N)}(0) - x_k^{(N)}(0) - \frac{L}{N}X(\frac{kL}{N})| < \frac{C_1}{N^2}, |\dot{x}_{k+1}^{(N)}(0) - \dot{x}_k^{(N)}(0) - \frac{L}{N}V(\frac{kL}{N})| < \frac{C_2}{N^2} \tag{6}$$

uniformly in k.

Define constants

$$c_1 = L\int_0^L |\frac{d^2X}{du^2}(u)|du, c_2 = L\int_0^L |\frac{d^2V}{du^2}(u)|du, \tag{7}$$

In some sense c_1, c_2 define fluctuations of the "profile". We will need also the constant

$$\gamma = \gamma(X, V, \alpha, \omega_0, C_1, C_2, c_1, c_2) = (1 + \frac{\alpha}{8\omega_0})(2c_1 + C_1L^{-1}) + \frac{2c_2 + C_2L^{-1}}{4\omega_0} > 0 \tag{8}$$

Let $\Omega_N^{(0)}(\delta) \subset R^{2N}, 0 < \delta < 1$, be a set of "almost smooth" initial conditions $x_k^{(N)}(0), \dot{x}_k^{(N)}(0), k = 0, ..., N-1$, with additional condition that $\gamma(X, V) < \delta$, and $\Omega_N(\delta)$ be the domain of $R^N = \{(x_0, ..., x_{N-1})\}$, defined for some $0 < \delta < 1$ by the estimates

$$|x_{k+1} - x_k - \frac{L}{N}| < \frac{L\delta}{N}$$

for all k.

Theorem 1 *Let initially the system belong to $\Omega_N^{(0)}(\delta)$ for some $0 < \delta < 1$. Then with probability 1 it stays in $\Omega_N(\delta)$ for all $t \geq 0$, that is*

$$|x_{k+1}^{(N)}(t) - x_k^{(N)}(t) - \frac{L}{N}| < \frac{L\delta}{N}$$

for all k, t.

It follows that with probability 1 particles conserve the initial order at any time $t > 0$.

Convergence to regular continuum mechanics Let $x_k^{(N)}(t)$ be the position of $k-$th particle at time t.

With each point $x \in R$ we associate the particle with number $k(x, N)$ such that

$$x_{k(x,N)}^{(N)}(0) \leq x < x_{k(x,N)+1}^{(N)}(0)$$

Theorem 2 *We have*

1)For any $T > 0$ uniformly in $t \in [0, T]$ and in $x \in R$ there exists the limit almost surely

$$\lim_{N\to\infty,\varepsilon\to 0} x_{k(x,N)}^{(N)}(t) = Y(t, x) \in R \tag{9}$$

where function $Y(t, x)$ satisfies the condition $Y(t, x + L) = Y(t, x) + L$ for any $x \in R$.

2) Moreover, $Y(t, x) : R \to R$ is differentiable in x and t and strictly increasing in x for each fixed t. So it is a diffeomorphism of R for any t .

The function $Y(t, x) \in R$ will be called the trajectory of the continuous media particle which is initially at point $x \in R$.

Conservation law, Euler equation and pressure For given N define the distribution function on $[0, L)$

$$F^{(N)}(t, y) = \frac{1}{N}\sharp\{k \in \{0, 1, ..., N-1\} : \pi(x_k(t)) \leq y\}, y \in [0, L)$$

where $\pi(x) = x, \mod L$. One can prove that uniformly in $y \in [0, L)$ and in $t \in [0, T]$, for any $T < \infty$, we have almost surely

$$\lim_{N\to\infty,\varepsilon\to 0} F^{(N)}(t, y) = F(t, y), y \in [0, L),$$

where $\varepsilon \to 0, m \to 0, N \to \infty$, such that $\frac{2m}{\varepsilon} \to \alpha$, $\varepsilon N \to 0$ and $F(t, y)$ is twice differentiable in y and t.

Define the density of "the number of continuum media particles" as

$$\rho(t, y) = \frac{dF(t, y)}{dy}, y \in [0, L) \tag{10}$$

As the particles do not collide, then one can unambiguously define the function $u(t, y)$ as the speed of the (unique) particle situated at time t at the point y.

Theorem 3 *Denote $\omega_1 = \omega_0 L$. For any $t > 0$, $y \in [0, L)$ we have :*

$$\frac{\partial\rho(t, y)}{\partial t} + \frac{d}{dy}(u(t, y)\rho(t, y)) = 0 \tag{11}$$

$$\frac{\partial u(t, y)}{\partial t} + u(t, y)\frac{\partial u(t, y)}{\partial y} + \alpha u(t, y) - f = -\frac{\omega_1^2\rho_y(t, y)}{\rho^3(t, y)} = \frac{1}{\rho(t, y)}\frac{d}{dy}\frac{\omega_1^2}{\rho(t, y)} = -\frac{p_y(t, y)}{\rho(t, y)} \tag{12}$$

where $p(t, y)$ is called pressure and is defined as follows:

$$p(t, y) = -\frac{\omega_1^2}{\rho(t, y)} + C \tag{13}$$

and C is a constant.

G. Martynov (IITP RAS) **Cramér-von Mises test for parametric dictribution family** [1]

0. Introduction. Let $X^n = \{X_1, X_2, ..., X_n\}$ be the sample from the r.v. with the distribution function $F(x)$, $x \in R_1$. We will test the hypothesis $H_0: \quad F(x) \in \mathcal{G} = \{G(x,\theta),\ \theta \in R_k\}$, where θ is an unknown vector of parameters. We will consider the Cramér-von Mises statistic

$$\omega_n^2(\hat{\theta}_n) = n\int_{-\infty}^{\infty}(F_n(x) - G(x,\hat{\theta}_n))^2\, dG(x,\hat{\theta}_n) \equiv n\int_0^1 (\hat{F}_n(t) - t)^2 dt,$$

where $\hat{\theta}_n$ is the maximum likelihood estimator of θ, $F_n(x)$ and $\hat{F}_n(t)$ are the empirical distribution functions, based on the samples X^n and $T^n = G(X^n, \hat{\theta}_n)$, correspondingly. Under some regularity conditions,

$$\omega_n^2(\hat{\theta}_n) \ \to_d \ \omega^2(\theta^0) = \int_0^1 \xi^2(t,\theta^0)dt, \tag{1}$$

where $\xi(t,\theta^0)$ is the Gaussian process with zero mean and with some covariance function $K(t,\tau,\theta^0)$. It follows that in the general case, the distribution of the Cramér-von Mises statistic may depend on all unknown parameters or on their part.

It is well known that the empirical process does not depend on unknown parameter θ^0 for the family of the form (see [1, 4])

$$\mathcal{G} = \{G((x-\theta_1)/\theta_2),\ -\infty < x < \infty, \theta_2 > 0\}.$$

Another class of the distribution family proposed in [6] is

$$\mathcal{R} = \{R((x/\beta)^\alpha),\ \alpha > 0,\ \beta > 0, x \in [0,\infty)\}.$$

Both of these families are closely interconnected. Here we want to consider the two cases when the distribution of the $\omega^2(\theta^0)$ depends on the parameters. One of the methods for calculating the asymptotic distributions of the statistics under consideration is also discussed.The alternative method for testing such hypotheses is set out in [5].

1. Gamma distribution family. Asymptotic distribution of the Cramér-von Mises statistic for the gamma distribution family

$$G(x;\theta,\kappa) = \frac{\Gamma(\kappa, x/\theta)}{\Gamma(\kappa)} \equiv H\left(\frac{x}{\theta}, \kappa\right), -\infty < x < \infty,\ \theta > 0,\ \kappa > 0,$$

depends on one unknown parameter κ. This follows from the theorem below.

[1] e-mail: martynov@iitp.ru, magevl@gmail.com

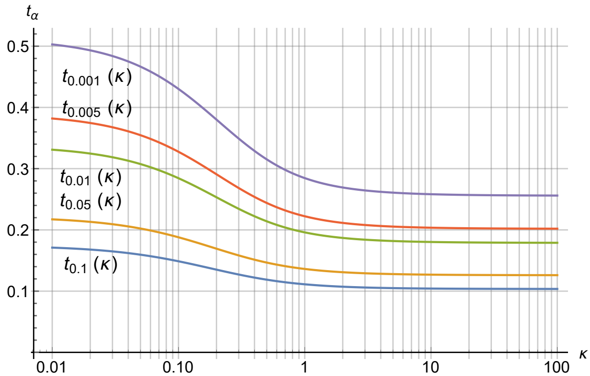

Figure 1. Asymptotic upper critical levels of the Cramér-von Mises statistic for gamma distribution family

Theorem 1. *The covariance function of the corresponding to the gamma distribution family asymptotic empirical process can be represented as follow*

$$K(t,\tau;\kappa) = \min(t,\tau) - t\tau - C(\kappa)\big(e^{-u}u^{\kappa}W(v,\kappa) + \kappa W(u,\kappa)W(v,\kappa)$$
$$+e^{-v}v^{\kappa}W(u,\kappa) - e^{-(u+v)}(uv)^{\kappa}\psi'(\kappa)\big)\Big|_{u=H^{-1}(t,\kappa),\ v=H^{-1}(\tau,\kappa)},$$
$$C(\kappa) = 1/(\Gamma(\kappa)^2(\kappa\psi'(\kappa)-1)),$$
$$W(z,\kappa) = \frac{z^{\kappa}}{\kappa^2}\,{}_2F_2(\{\kappa,\kappa\},\{1+\kappa,1+\kappa\};-z) + (\Gamma(\kappa,z)-\Gamma(\kappa))(\ln z - \psi(\kappa)),$$

${}_2F_2(\cdot)$ is a generalized hypergeometric function, $\Gamma(\kappa,z)$ is the upper incomplete gamma function, $\psi(z)$ is the digamma function.

A detailed five-digit table was calculated, on the basis of which table 1 was drawn. The independence of the distribution of statistics in question in this section of κ was briefly noted in [7].)

2. Family of exponentiated distribution function. The exponentiated exponential distribution $F(x;t,\kappa) = (1-e^{x/t})^{\kappa},\ \kappa > 0,\ t > 0$ was introduced by [3]. This definition can be generalized to the form exponentiated distribution function

$$F(x;t,\kappa) = G^{\kappa}\left(\frac{x}{t}\right),\ \kappa > 0,\ t > 0,$$

where $G(\cdot)$ is a continuous distribution function. The asymptotic distribution of the Cramér-von Mises statistic for such a family depends generally on two parameters.

3. Approximation of the integral of a squared Gaussian process. Here we present an effective method of calculating the distributions of integrals from squared Gaussian processes [2]. The integral in (1) will be approximated by the sum as follows

$$\omega^2 = \int_0^1 \xi^2(t)dt \approx \sum_{i=1}^{m} \xi^2(t_i),$$

where $\xi(t)$ is the Gaussian process with zero mean and a covariance function $K(t,\tau)$. Here, we are interested in the Darboux sums, when $a_i = 1/m$. We will use in the sequence the following notation:

$$A(t,\tau) = 2K^2(t,\tau), \;\; t_i = \tau_i = (i-1/2)/m,$$
$$\underline{A}^{k,l}(\tau) = \lim_{t\uparrow\tau} \frac{\partial^{k+l}}{\partial t^k \partial \tau^l} A(t,\tau), \;\; \overline{A}^{k,l}(\tau) = \lim_{t\downarrow\tau} \frac{\partial^{k+l}}{\partial t^k \partial \tau^l} A(t,\tau).$$

Theorem 2. *Let there exist all derivatives up to forth order from the function $A(t,\tau)$ on $\{0 \le t,\tau \le 1, t \ne \tau\}$ and the derivatives are uniformly bounded on this square without the diagonal. Then the variance $D\varepsilon_m$ can be represented asymptotically in the form*

$$D\varepsilon_m = \frac{c_2}{m^2} + O\left(\frac{1}{m^4}\right), \;\; c_2 = \frac{1}{12}\int_0^1 \left(\underline{A}^{1,0}(t) - \overline{A}^{1,0}(t)\right) dt.$$

This approximation was applied to the calculation of the above table. First, the eigenvalues λ_i, $i = 1,...,m$ of the matrix $(K(t_{i,j}, \;\; i,j \in (1,...m))$ are calculated. Then these values are substituted in the Smirnov formula to calculate the distributions of quadratic forms from normal r.v. If you use the eigenvalues of the covariation function $K(t,\tau)$, then the correction of the quadratic form will be required and the Smirnov formula can not be used.

BIBLIOGRAPHY

[1] Anderson, T. W., Darling, D. A. Asymptotic theory of certain "Goodness of Fit" criteria based on stochastic processes. The Ann. of Math. Statist. 1952. V. 23. No. 2. P. 193 –212.

[2] Deheuvels, P., Martynov G. Cramer-von-Mises-type tests with applications to test of independence for multivariate extreme-value distributions. Communications in Statistics-Theory and Methods. 1996. V. 25. No. 4. P. 871 – 908.

[3] Gupta, R. D. and Kundu, D. (1999). Theory & methods: Generalized exponential distributions. Australian & New Zealand Journal of Statistics, 41(2), 173–188.

[4] Kac, M., Kiefer, J., Wolfowitz, J. On tests of normality and other tests of goodness-of-fit based on distance methods. Ann. Math. Statist. 1955. V. 30. P. 420 –447.

[5] Khmaladze E.V. A martingale approach in the theory of parametric goodness-of-fit tests. Theor. Prob. Appl. 1981. 26. No 2. P. 240 – 257.

[6] Martynov G. Note on the Cramer-von Mises test with estimated parameters. Publ. Math. Debrezen. 2010. V. 76. No. 3. P. 341 – 346.

[7] Stephens M. A. Tests based on EDF statistics. In D'Agostino R. B., Stephens M. A., eds. Goodness-of-Fit Techniques, Marcel Dekker, New York/Basel, 1986. P. 97 – 193.

Nikitina A. V. (Don State Technical University, Rostov-on-Don), **Dolgov V. V.** (Don State Technical University, Rostov-on-Don) **Research of the allelopathic interaction of hydrobionts based on a stochastic approach**

Currently, we can distinguish two main directions in the development of mathematical modeling, where quite constructive methods are proposed to compensate for a priori uncertainty arising from the non-stationary and stochastic nature of ecological systems. The first direction is a methodology for solving identification and verification problems as a sequential process of determining and refining numerical values of model coefficients. The second direction is related to the development of a strategy for finding the hidden patterns of the system under study and integrating them into the model. The aim of the study was to develop and numerically implement a mathematical model of biological kinetics that takes into account the movement of water flow, microturbulent diffusion, spatial distribution of nutrients, salinity, temperature, oxygen regime, complex bottom and coastline geometry. The model is designed to study the mechanism of external hormonal regulation of phytoplankton as well as allelopathic interaction of the Azov Sea hydrobionts, including the most common summer plankton species. Let us consider phytogenic factors: algae, being a part of various communities, experience a diverse influence of neighboring species and themselves have an impact on them. Relationships can be both direct (competition, symbiosis, epiphytism), and indirect - through microorganisms and animals, as well as through allelopathy. Allelopathy is understood as the effect of some autotrophic organisms on others through alteration of the environment by the release of their metabolites into it [1]. Algal metabolites include products of nitrogen and carbohydrate metabolism, highly specialized substances such as vitamins, growth agents, antibiotics, etc., which sometimes have high biological activity [2]. Such substances can act both as inhibitors and as stimulants. According to studies, the change of species in the community occurs as follows: when some species proliferate in the pond, they release enough inhibitors to suppress the development of other species of algae, which gradually die except for the individual more resistant representatives of each species. When the dominant algae disappears, probably as a result of autotoxins, its antibiotic effect ceases, and resistant representatives of other species begin to multiply rapidly [3]. Any hydrobiological environment is a large, complex, weakly deterministic and evolving object of study [4-6]. The theory of self-organization of models shows that the vast majority of processes in nature can be described, in particular, in the form of high-degree polynomials, which are a special case of the generalized Kolmogorov-Gabor polynomial:

$$y = a_0 + \sum_{i=1}^{n} a_i x_i + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_i a_j x_i x_j + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_i a_j a_k x_i x_j x_k.$$

The number of terms of the complete polynomial is C_{m+q}^{q} where m is the number of variables and q is the degree of the polynomial. Therefore, the main task of modeling complex systems using regression equations is to exclude a subset of "superfluous"uninformative coefficients in the polynomial and to preserve the combination of "explanatory terms"[7]. The difference scheme for the homogeneous equations presented in the mathematical model of biological kinetics of a shallow water body (using the example of the Azov Sea) will be written in the form:

$$\frac{C^{n+1} - C^n}{\tau} + A_x C^n + A_y C^n + A_z C^{n+\sigma} = 0, \tag{1}$$

where C – impurity concentration; τ – time increment; n – time layer number; σ – layout weight, $\sigma \in [0,1]$; A_x, A_y, A_z – discrete analogs of transfer operators along coordinate directions Ox, Oy, Oz:

$$(A_x C)_i = u_{i+\frac{1}{2}} \frac{C_{i+1} - C_i}{2h_x} + u_{i-\frac{1}{2}} \frac{C_i - C_{i-1}}{2h_x} - \mu_{i+\frac{1}{2}} \frac{C_{i+1} - C_i}{h_x^2} + \mu_{i-\frac{1}{2}} \frac{C_i - C_{i-1}}{h_x^2}, 0 \le i \le N,$$

*This work was supported by the RSF (project 21-71-20050)

where i – discretization index, h_x – step of spatial variable; N – number of steps, μ – diffusion coefficient; u – water flow velocity. Discrete operators A_y, A_z are written in the same way.

When using a difference scheme of the form (1), the problem of biological kinetics is solved by direct methods, and in the case of regions for which the linear size in one direction is significantly smaller than in the remaining ones, the time step can be taken much larger, which makes it possible to speed up the prediction of changes in impurity concentrations.

Theorem. When the condition $\tau \leq \left(\max\left(\frac{2\mu}{h_x^2} + \frac{2\mu}{h_y^2}\right)\right)^{-1}$ is met, then the difference scheme is conditionally stable, and we have the estimate $\left\|C^{n+1}\right\| \leq \left\|C^0\right\|$.

During statistical processing of field data for the numerical implementation of the mathematical model of biological kinetics, coefficients of asymmetry, kurtosis, variance, standard deviation, and coefficient of variation were calculated.

REFERENCES

1. *Nikitina, A.V., Kravchenko, L., Semenov, I., Belova, Y., Semenyakina, A.* Modeling of production and destruction processes in coastal systems on a supercomputer. MATEC Web of Conferences – 2018 – p. 226. DOI: 10.1051/matecconf/201822604025

2. *Atayan, A.M., Nikitina, A.V., Sukhinov, A.I., Chistyakov, A.E.* Mathematical modeling of hazardous natural phenomena in a shallow basin // Comput. Math. Math. Phys. – 61:2 (2022) – p. 269–286. DOI: 10.1134/S0965542521120034

3. *Semenchenko, V.P., Razlutsky, V.I.* Factors that determine the daily distribution and movement of zooplankton in the littoral zone of freshwater lakes (review) // Journal of Siberian Federal University. Biology 2. – p. 191–225. (*in Russian*)

4. *Romanenko, V.D., Sakevich, A.I., Usenko, O.M.* Metabolic mechanisms of interaction of higher aquatic plants and blue-green algae-causative agents of water "blooming"// Journal of Hydrobiology. – 2005. 41(3). – p. 5-57. (*in Russian*)

5. *Sakevich, A.I., Usenko, O.M.* Exometabolites of aquatic macrophytes of phenolic nature and their influence on the vital activity of planktonic algae // Hydrobiological journal. – 2003. 39(3). – p. 36-44. (*in Russian*)

6. *Zhdanova, O.L., Abakumov, A.I.* Modeling Of the Phytoplankton Dynamics Considering the Mechanisms of Ectocrine Regulation // Mathematical Biology and Bioinformatics. – 2015. – Vol. 10, Is. 1. – p. 178-192. DOI: 10.17537/2015.10.178 (*in Russian*)

7. *Sukhinov, A.I., Chistyakov, A.E.* Parallel implementation of a three-dimensional model of hydrodynamics of shallow water bodies on a supercomputer system // Computational methods and programming: new computing technologies. – 2013. – Vol. 13. – p. 290-297. DOI: 10.13140/RG.2.1.2989.0405

On the probabilistic representation of the resolvent of the two-dimensional Laplacian

Nikolaev Artem *PDMI RAS, Russia*, E-mail: nikolaiev.96@bk.ru

KEY WORDS: Stochastic processes, local time, two-dimensional Wiener process.

MATHEMATICAL SUBJECT CLASSIFICATION: 60J55 Local time and additive functionals...

Abstract:

Let $w(\tau) = (w_1(\tau), w_2(\tau))$, $\tau \geqslant 0$, $w(0) = (0, 0)$ be a two-dimensional Wiener process. Consider a family of random linear operators

$$\mathcal{A}_\lambda^t f(x) = \int\limits_0^t e^{\lambda\tau} f(x - w(\tau))\, d\tau, \tag{1}$$

defined on the functions $f(x) \in L_\infty \cap C(\mathbb{R}^2)$ for all $t > 0$ and $\lambda \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re}\lambda < 0$.

Such an operator family arises in the construction of a probabilistic representation of the resolvent of the two-dimensional Laplacian.

Namely, the following relation holds

$$(-\frac{1}{2}\,\Delta - \lambda\, I)^{-1}\, f(x) = \int\limits_0^\infty e^{\lambda\,\tau}\, \mathbf{E}\, f(x - w(\tau))\, d\tau = (u) \lim_{t\to\infty} \mathbf{E}\,[\mathcal{A}_\lambda^t\, f(x)] \tag{2}$$

for all functions $f(x) \in L_\infty \cap C(\mathbb{R}^2)$.

Note that the operator $\mathcal{A}_\lambda^t$ cannot be extended to an integral operator on the entire space $L_2(\mathbb{R}^2)$. In particular, from a probabilistic point of view, this means that the process $w(\tau)$ does not have local time at an arbitrary point $x \in \mathbb{R}^2$ by time $t > 0$.

We will construct a family of random integral operators $\mathcal{R}_\lambda^t$ defined on the entire space $L_2(\mathbb{R}^2)$ and satisfying the relation

$$(-\frac{1}{2}\,\Delta - \lambda\, I)^{-1}\, f(x) = (L_2) \lim_{t\to\infty} \mathbf{E}\,[\mathcal{R}_\lambda^t\, f(x)] \tag{3}$$

for all $\lambda \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re}\lambda \leqslant 0$.

It will be shown that the kernels $r_\lambda(t, \cdot)$ of the corresponding operators belong with probability 1 to the Sobolev class $W_2^\alpha(\mathbb{R}^2)$, $0 \leqslant \alpha < 1/2$. Also, for the function $r_\lambda(t, \cdot)$, an explicit formula will be obtained in the form of a trajectory functional of the two-dimensional Wiener process $w(\tau)$.

References

[1] S. M. Berman, *Local times and sample function properties of stationary Gaussian process.* — Trans. Amer. Math. Soc., **137** (1969), 277–299.

[2] N. Dunford, J. T. Schwartz, *Linear Operators. General Theory.* — Izd. Inostr. Lit., Moscow., (1962).

[3] M. Sh. Birman, M. Z. Solomyak, *Spectral Theory of Self-adjoint Operators in Hilbert Space* — Leningrad Univ., Leningrad., (1980).

SOME RESULTS ON SIGNED INTERPOLATING DEFLATORS

IGOR PAVLOV, ANZHELIKA DANEKYANTS, NATALIA NEUMERZHITSKAIA, INNA TSVETKOVA, ROSTOV-ON-DON, DSTU

Currently, the development of the theory of Haar interpolations of financial markets with the use of martingale measures continues. The existence of martingale measures of discounted stock prices means that this kind of interpolation can only be used in complete markets. However, real financial markets often contain elements of arbitrage opportunities. Therefore, it is important to develop techniques for interpolating processes that do not admit martingale measures. This work is just devoted to this problem. Here, signed deflators serve as the main interpolation tool. With their help, the Haar interpolation procedure is defined. In the case of the existence of martingale measures, this procedure leads to the process interpolation, which coincides with the martingale interpolation. The paper introduces the concept of an admissible deflator, defines (as when martingale measures exist) the universal Haar uniqueness property and its weakened variants. The main results of the work are related to the so-called special Haar uniqueness property, which leads to the uniqueness of the admissible deflator.

Consider a stochastic basis $\big(\Omega, F = (\mathcal{F}_k)_{k=0}^K, P\big)$, where Ω be a set, $F = (\mathcal{F}_k)_{k=0}^K$ be a strictly increasing filtration, $\mathcal{F}_0 = \{\Omega, \emptyset\}$, $K \le \infty$, any $\mathcal{F}_k$ $(0 \le k < K+1)$ be finite, and P be a probability on $\mathcal{F}_K$ (if $K = \infty$, then $\mathcal{F}_K = \mathcal{F}_\infty$ is the least σ-algebra containing all $\mathcal{F}_k$, $0 \le k < \infty$). We assume that the probability measure P loads all non-empty subsets from $\mathcal{F}_k$, $0 \le k < K+1$.

Let $Z = (Z_k, \mathcal{F}_k)_{k=0}^K$ be an adabted process that can take any real values. A martingale $D = (D_k, \mathcal{F}_k, P)_{k=0}^K$ is said a signed deflator of the process Z if D_0=1 and the process $DZ = (D_k Z_k, \mathcal{F}_k, P)_{k=0}^K$ is a martingale.

We use in the sequel the following system of notations. Let A be an atom in $\mathcal{F}_k$, B_i $(i = 1, 2, \dots, m)$ be atoms in $\mathcal{F}_{k+1}$,

$$A = B_1 + B_2 + \cdots + B_m, a := Z_k|_A, b_i := Z_{k+1}|_{B_i}, p_i := P(B_i), d_i := D_{k+1}|_{B_i}.$$

Generally splitting index m of atom A and numbers a, b_i, p_i, d_i depend on A.

A signed deflator D of the process Z is said admissible if $\forall 0 \le k < K+1$, for all atom $A \in \mathcal{F}_k$ and for all non-empty subset $I \subset \{1, 2, \dots, m\}$

$$\sum_{i \in I} p_i d_i \ne 0.$$

We will also consider on $(\Omega, \mathcal{F}_K)$ Haar filtrations (HF)

$$H = (\mathcal{H}_n)_{n=0}^L,\ \mathcal{H}_n \subset \mathcal{F}_K, \tag{0.1}$$

where $\mathcal{H}_0 = \{\Omega, \emptyset\}$ and each σ-algebra $\mathcal{H}_n$ is generated by a partition of the set Ω into exactly $n+1$ atoms $H_0^n, H_1^n, ..., H_n^n$. A Haar filtration is said special

Haar filtration if at every moment $n > 1$ only those two atoms of $H_0^n, H_1^n, ..., H_n^n$ can be divided that were obtained by division at the previous moment $n-1$. Haar filtration $(\mathcal{H}_n)_{n=0}^L$ from (0.1) is said interpolating Haar filtration (IHF) of $(\mathcal{F}_k)_{k=0}^K$ if there exists an increasing sequence of integers $n_k, 0 \leq k < K+1$, such that $\mathcal{H}_{n_k} = \mathcal{F}_k$ (and hence $\mathcal{H}_L = \mathcal{F}_K$). Special interpolating Haar filtration (SIHF) is defined analogically.

Let us fix an IHF $(\mathcal{H}_n)_{n=0}^L$ of $(\mathcal{F}_k)_{k=0}^K$ and let $D = (D_k, \mathcal{F}_k, P)_{k=0}^K$ be a signed admissible deflator of the process $Z = (Z_k, \mathcal{F}_k)_{k=0}^K$. Denoting $X_{n_k} := D_k Z_k$ and $Y_{n_k} := D_k$, we obtain martingales $(X_{n_k}, \mathcal{H}_{n_k}, P)_{k=0}^K$ and $(Y_{n_k}, \mathcal{H}_{n_k}, P)_{k=0}^K$. Then we can define two martingales $X = (X_n, \mathcal{H}_n, P)_{n=0}^L$ and $Y = (Y_n, \mathcal{H}_n, P)_{n=0}^L$ in the following obvious way: for any $n < L+1$ find $n_k \geq n$ and put

$$X_n := E^P[X_{n_k}|\mathcal{H}_n],\ Y_n := E^P[Y_{n_k}|\mathcal{H}_n]. \tag{0.2}$$

It is clear that such definitions are correct.

The process $Z^{int} = (Z_n^{int}, \mathcal{H}_n)_{n=0}^L$ defined by the formula

$$Z_n^{int} = \begin{cases} Z_k,\ if\ n = n_k\ (0 \leq k < K+1), \\ \dfrac{X_n}{Y_n},\ if\ n \neq n_k, Y_n \neq 0. \end{cases} \tag{0.3}$$

will be called H-interpolation of the process Z with the help of the deflator D.

It is clear that the process $Y = (Y_n, \mathcal{H}_n, P)_{n=0}^L$ is a signed admissible deflator of the process $Z^{int} = (Z_n^{int}, \mathcal{H}_n)_{n=0}^L$.

Let the process $Z = (Z_k, (\mathcal{F}_k)_{k=0}^K)$ admit a martingale measure Q, equivalent to the physical measure P, i.e. the process $(Z_k, \mathcal{F}_k, Q)_{k=0}^K$ be a martingale. Denote $h := \dfrac{dQ}{dP}$ and $D_k := E^P[h|\mathcal{F}_k]$. It is clear that the process $D = (D_k, \mathcal{F}_k)_{k=0}^K$ is a strictly positive deflator of the process Z. Hence for all $n \leq n_k$ $Y_n = E^P[Y_{n_k}|\mathcal{H}_n] = E^P[D_k|\mathcal{H}_n] > 0$ and $Z_n^{int} = \dfrac{X_n}{Y_n}$. Applying the generalized Bayes formula, it is easy to see that the process $(Z_n^{int}, \mathcal{H}_n, Q)_{n=0}^L$ is a martingale. From this fact it follows that H-interpolation of the process Z with the help of deflator D coincides with the Haar interpolation of Z with respect to the martingale measure Q (c.f. [1], [2]).

We say that a signed admissible deflator $D = (D_k, \mathcal{F}_k, P)_{k=0}^K$ satisfies the Haar uniqueness property (HUP) if there exists a Haar interpolation $H = (\mathcal{H}_n)_{n=0}^L$ of the initial filtration F such that the process (0.3) admits only one deflator, namely the deflator $Y = (Y_n, \mathcal{H}_n, P)_{n=0}^L$, defined by (0.2).

We say that a signed deflator $D = (D_k, \mathcal{F}_k, P)_{k=0}^K$ satisfies the universal Haar uniqueness property — UHUP (resp., the special Haar uniqueness property — SHUP) if for every interpolating (resp., special interpolating) Haar filtration $H = (\mathcal{H}_n)_{n=0}^L$ of the initial filtration F the process (0.3) admits only one deflator, namely the deflator $Y = (Y_n, \mathcal{H}_n, P)_{n=0}^L$, defined by (0.2).

Theorem 1. *Let $\forall k : 0 \leq k < K+1$ and for all atom $A \in \mathcal{F}_k$ we have $m \geq 3$. If there exists an admissible signed deflator D satisfying SHUP, then the numbers $a, b_1, \ldots, b_m$ are different.*

Theorem 2. *Let* $\forall k : 0 \leq k < K+1$ *and for all atom* $A \in \mathcal{F}_k$ *we have* $m \geq 4$ *and the numbers* $a, b_1, \ldots, b_m$ *be different. Then there exists an admissible signed deflater* D *satisfying SHUP.*

The problem of the existence of admissible deflators satisfying UHUP will be considered too.

References

1. Bogacheva, M.N., Pavlov, I.V.: Haar extensions of arbitrage-free financial markets to markets that are complete and arbitrage-free, *Russian Math. Surveys* **57**, N3 (2002) 581–583.
2. Bogacheva, M.N., Pavlov, I.V.: Haar extensions of arbitrage-free financial markets to markets that are complete and arbitrage-free, *Izvestiya VUZov, Severo-Kavkaz. Region, Estestvenn. Nauki*, N3 (2002) 16–24.
3. Gorgorova, V.V., Pavlov, I.V.: On Haar uniqueness properties for vector-valued random processes, *Russian Math. Surveys* **62**, N6 (2007) 1202–1203.
4. Pavlov, I.V., Tsvetkova, I.V., Shamrayeva V.V.: Some results on martingale measures of static financial markets models relating noncoincidence barycenter condition, *Vestn. Rostov Gos. Univ. Putei Soobshcheniya* **45**, N3 (2012) 177–181.
5. Pavlov, I.V.: New family of one-step processes admitting special interpolating martingale measures, *Global and Stochastic Analysis* **5**, N2 (2018) 111-119.
6. Pavlov, I.V., Tsvetkova, I.V., Shamrayeva V.V.: On the existence of martingale measures satisfying the weakened condition of noncoincidence of barycenters in the case of countable probability space, *Theory Probab. Appl.* **61**, N1 (2017) 167-175.
7. Pavlov, I.V., Tsvetkova, I.V., Shamrayeva V.V.: Some results on martingale measures of static financial markets models relating noncoincidence barycenter condition, *Vestn. Rostov Gos. Univ. Putei Soobshcheniya* **45**, N3 (2012) 177–181.
8. Pavlov, I.V., Tsvetkova, I.V., Shamrayeva V.V.: On the existence of martingale measures satisfying weakened noncoincidence barycenter condition: constructivist approach, *Vestn. Rostov Gos. Univ. Putei Soobshcheniya* **47**, N4 (2014) 132–138.
9. Shamraeva, V.V.: New method for transforming systems of inequalities for finding interpolating martingale measures, *International Research Journal* **54**, N 12-5 (2016) 30-41.
10. Pavlov, I.V., Shamraeva, V.V.: New results on the existence of interpolating and weakly interpolating martingale measures, *Russian Mathematical Surveys* **72**, N 4 (2017) 767-769.
11. Pavlov, I.V., Danekyants, A.G., Neumerzhitskaia, N.V., Tsvetkova, I.V.: Interpolating martingale measures and interpolating deflators of one-step processes on countable probability spaces, *Global and Stochastic Analysis* **7**, N1 (2020) 65-72.

Development of a model with random priorities

I.V. Pavlov, N.V. Neumerzhitskaia, S.I. Uglich, T.A. Volosatova

Russia, 344000, Rostov-on-Don, 1 Gagarin square, DSTU

The main result of this paper is the proof of the strict concavity of some function of integral form depending on n random variables, which we call priorities. This function is an objective function in the so-called model with priorities, in which the arbiter, following expert opinions, distributes funds among the enterprises and institutions under his jurisdiction. This result implies an important corollary about the existence and uniqueness of a local maximum point (which is also a global maximum point) of the objective function. This is a significant generalization of the corresponding result [1]. Earlier, the theorem on the existence and the uniqueness of a local maximum point (which is simultaneously a global maximum point) of the objective function was proved in paper [2], where the independence of n priorities under consideration was assumed. In this paper, on a general probabilistic model with the use of convexity arguments, an existence and uniqueness theorem is obtained under weaker (in comparison with [1]) conditions on three considered priorities.

Let $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ be a probability space. Consider the function

$$\Phi(u_1, u_2, \dots, u_n) = E\left(u_1^{\alpha_1} u_2^{\alpha_2} \dots u_n^{\alpha_n}\right), u_1 \geq 0, u_2 \geq 0, \dots, u_n \geq 0,$$

where E is the expectation with respect to the probability P; $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ are random variables taking values with probability one on the segment $[0,1]$; $u_n = -c_1 u_1 - c_2 u_2 - \dots - -c_{n-1} u_{n-1} + c_n$, where $c_1, c_2, \dots, c_n$ are strictly positive parameters. We assume equal to 0 the value of $u_i^{\alpha_i}$ if $u_i = 0$, $i = 1,2, \dots, n$. Thus, we get a function of $n - 1$ variables

$$F(u_1, u_2, \dots, u_{n-1}) := \Phi(u_1, u_2, \dots, u_{n-1}, -c_1 u_1 - c_2 u_2 - \dots - c_{n-1} u_{n-1} + c_n)$$

defined on the domain

$$D: \begin{cases} u_1 \geq 0 \\ u_2 \geq 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ u_{n-1} \geq 0 \\ c_1 u_1 + c_2 u_2 + \dots + c_{n-1} u_{n-1} \leq c_n, \end{cases}$$

The interior of D is denoted by D^0.

Function F is continuous on D, infinitely differentiable and strictly positive on D^0 and equal to 0 on $D \backslash D^0$. In this work we find the conditions on the priorities $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, under which the function F is strictly concave, and study some consequences of this fact.

Theorem 1. If P-almost surely (a.s.)

$$\alpha_i \geq 0 \ (i = 1,2, \dots, n), \tag{1}$$

$$\sum_{\substack{1\le k\le n,\\ k\ne i}} a_k \le 1,\ \ i=1,2,\dots,n, \qquad (2)$$

then the function F is concave on D^0. If the inequalities (1) and (2) are strict, then the function F is strictly concave on D^0.

It follows from Theorem 1 the impotent result on the uniqueness of maximal point of the objective function F.

Theorem 2. If P-a.s. the conditions (1) and (2) in the strict forms are satisfied, then the function F has exactly one local (and simultaneously global) maximum point on D^0.

Remark. Let $\Omega = [0,1]$, $\mathcal{F}$ be the σ-field of Borel subsets on $[0,1]$, $dP = dx$ be the Lebesgue measure on $(\Omega, \mathcal{F})$. In [1, Proposition 5], within the framework of this model for $n = 3$, the following result was obtained: if a.e. on $[0,1]$ $0<\alpha_1\le\frac{1}{2}, 0<\alpha_2\le\frac{1}{2}, 0<\alpha_3\le\frac{1}{2}$, any stationary point $(u_1,u_2)\in D^0$ of function $F(u_1,u_2)$ is a point of local maximum. It can be shown that this point is unique and is also a global maximum point. In our general case we obtain all this automatically (these conditions entail the fulfillment of the conditions (1) and (2)). But the conditions of the Theorem 2 themselves are much less restrictive.

References

[1] Neumerzhitskaia N V, Uglich S I, Volosatova T A 2020 Sufficient conditions for the uniqueness of the maxima of the optimization problem in the framework of a stochastic model with priorities depending on one random variable *E3S Web of Conferences 224*, 01014 https://doi.org/10.1051/e3sconf/202022401014

[2] Pavlov I V and Uglich S I 2017 Optimization of complex systems of quasilinear type with several independent priorities *Vestnik RGUPS* **3** pp 140–145.

Pchelintsev E. A., Perelevskiy S. S. (Tomsk State university, Tomsk, Russia) — **On estimation for the trend coefficient of a diffusion process by discrete time observations.** Let on the probability space $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ be defined the following stochastic differential equation : $dy_t = S(y_t)\,dt + \sigma(y_t)dw_t$, $0 \le t \le T$, where $(w_t)_{t\ge 0}$ is a scalar standard Wiener process, the initial value y_0 is a given constant, $\sigma(\cdot)$ is an unknown diffusion coefficient and $S(\cdot)$ is an unknown function from special functional class Σ introduced in [1]. The problem is to estimate the function $S(x)$, $x \in [a, b]$, from discrete time observations $(y_{t_j})_{0\le j\le N}$, $t_j = j\delta$, with the frequency $\delta = \delta_T \in (0,\, 1)$ and the sample size $N = N(T) \to \infty$ (as $T \to \infty$) are some functions of T. The diffusion coefficient σ is a nuisance parameter.

Using the sequential analysis method, in [1] for estimating the function S the authors have been proposed an asymptotically efficient model selection procedure $\hat{S}$ based on weighted LSE. In this paper was proposed a model selection procedure S^* based on improved estimates, which outperforms in mean square accuracy the estimate from [1], i.e.

Theorem. The model selection procedure S^* is improved in compare with the procedure $\hat{S}$ in the following sense

$$\sup_{S\in\Sigma}(\mathbf{E}_S\|S^* - S\|^2 - \mathbf{E}_S\|\hat{S} - S\|^2) < 0\,,$$

where $\|\cdot\|$ is the norm in $L_2[a, b]$.

For improvement of the precise we use the special shrinkage estimates from [2, 3]. Sharp non-asymptotic oracle inequality for a quadratic risk of the proposed estimate was obtained.

REFERENCES

1. *Galtchouk L.I., Pergamenshchikov S.M.* Adaptive efficient analysis for big data ergodic diffusion models. Stat. Inference Stoch. Process, 2021, pp. 1–32, DOI 10.1007/s11203-021-09241-9.
2. *Pchelintsev E.A., Pergamenshchikov S.M.* Oracle inequalities for the stochastic differential equations. Stat. Inference Stoch. Process, 2018, pp. 1–15, DOI 10.1007/s11203-018-9180-1.
3. *Pchelintsev E., Pergamenshchikov S., Leshchinskaya M.* Improved estimation method for high dimension semimartingale regression models based on discrete data. Stat. Inference Stoch. Process, 2021, pp. 1–30, DOI 10.1007/s11203-021-09258-0.

This work was supported by the RSF (project 20-61-47043).

Rahimbaeva E. O. (Don State Technical University, Rostov-on-Don), **Atayan A. M.** (Don State Technical University, Rostov-on-Don) **Processing of noisy images and data based on recursive filtering**

Relatively recently, one of the main sources of data for the analysis and forecast of coastal and marine systems were the results of measurements of salinity, temperature, current velocities, etc. This application involves the use of large-scale expeditions using a research fleet. In parallel with this, the development of satellite constellations, unmanned aerial vehicles, in the last thirty years, remote sensing methods have been actively used. The advantage of such methods can be considered a wide coverage of the object of study, the ability to measure the parameters of the aquatic environment: the rise in the temperature level of the near-surface layer, the distribution of salts in it for vast water areas almost simultaneously. Therefore, there is a possibility of joint use of remote sensing data, including satellite and mathematical modeling of hydrophysical and hydrobiological processes in coastal systems.

The main objective of this work is to equip systems that simulate the change in processes that are analyzed and predicted with real input data, which will allow you to correctly set initial-boundary problems, which are systems of nonlinear equations with partial derivatives, as well as determine the coefficients of these equations and other functional dependencies, included in the constructed mathematical models [1]. The problem of obtaining the necessary data on-line can be solved by using satellite data from remote sensing of the Earth.

Earth remote sensing data allow not only to equip mathematical models with the necessary information (boundary, initial conditions, information about source functions), but also to assimilate the information received from the satellite by the constructed models in order to increase the accuracy and increase the reliability of predictive modeling. At the same time, it becomes necessary to develop and implement high-tech methods for assimilation and filtering of observational data for the studied aquatic ecosystem using satellite data used in the development and verification of mathematical models.

Image processing algorithm. Based on the constructed mathematical model of biogeochemical cycles, an algorithm for processing input data was developed. The input data are satellite images of the coastal systems of the South of Russia. On the basis of the algorithm , a software package was developed that is designed to highlight the boundaries of the object under consideration, taking into account interference and noise in the image (the influence of weather conditions at different times of the year) [2]. The developed software package is written in the Python programming language in the PyCharm development environment .

When working with images of the Sea of Azov, to build a grid and highlight boundaries, there was a problem of digital image processing, which is influenced by factors such as: environment; use of real equipment; interference and noise that appear during data transmission.

These factors degrade the quality of the resulting image, which leads to a loss of resolution and a decrease in the signal-to-noise ratio.

To solve problems in the field of image processing, it is required to apply special methods and algorithms, as well as repeated testing involving a wide database of different images to improve their visual perception and increase information content for vision systems.

There are various branches of digital imaging such as: linear image processing; non-linear image processing; recursive implementation of linear and non-linear image processing algorithms.

For further work, it was decided to use recursive filtering, since it is one of the most promising and widely used in the tasks of reducing computational costs in image processing.

Recursive filtering is based on the recursive relationship between the input and output variables of the system. For one-dimensional signals, a similar recurrence relation has the following form:

*The study was carried out with the financial support of the Council for Grants of the President of Russian Federation within the framework of scientific project No.MD-3624.2021.1.1.

$$r(m) = \sum_{j-1}^{J} a(i)f(n-j+1) - \sum_{k-2}^{K} b(k)r(m-k+1), \quad (1)$$

where $f(n)$ – readings of the input sequence, $n = 1, 2, \ldots, N$; $r(m)$ – readings of the output sequence, $m = 1, 2, \ldots, N$; $a(i), b(k)$ – weight multipliers.

The key point here is that the m–th element of the output sequence depends not only on the last and $j-1$ penultimate elements of the input sequence, but also on $K-1$ previous elements of the output sequence [3].

There are various methods for recursive image processing, for example: interval integration; interval differentiation; quasioptimal filtering of small-sized objects from noise; trapezoidal impulse response; two-stage recursive – separable digital filter.

Since in our work there is a problem of processing noise in the image when transmitting images from a satellite, one of the most popular methods of digital image processing is the Kalman filter, which is one of the varieties of recursive filtering. This means that only the result of the previous iteration of the filter (in the form of an estimate of the state of the system and an estimate of the error in determining this state) and current observations are needed to calculate the current state of the system. This filter estimates the state vector of a dynamic system using a number of incomplete and noisy measurements.

The filter operation is divided into two stages: extrapolation – prediction of system values; adjusting system values.

When using the Kalman filter in our software package, a number of important tasks can be solved. For example, to track the dynamics of plankton populations in the coastal part of southern Russia, specifically the Taganrog Bay and the Sea of Azov.

Findings. The search for the best solution (taking into account the uncertainty of the input data and model parameters) can be carried out on the basis of a scenario approach. In addition, when forming a set of prognostic scenarios, this problem can be solved using technology based on the use of direct and inverse modeling methods, which is based on a combination of variational principles, decomposition, splitting and complexing methods. At the same time, the use of effective methods for processing input data for mathematical modeling of the state of aquatic ecosystems will, on the one hand, solve the problem of lack of data, and, on the other hand, improve the accuracy of forecasting changes in the state of the objects under study.

REFERENCES

1. *Gushchin, V. A., Sukhinov, A. I., Nikitina, A. V., Chistyakov, A. E., Semenyakina, A. A.* A model of transport and transformation of biogenic elements in the coastal system and its numerical implementation // Comput. Math. and Math. Models Physics – 2018. – Vol. 58, Is. 8. – p. 1316–1333. DOI: 10.1134/S0965542518080092 (*in Russian*)

2. *Gonzalez, R. S., Woodsue, R. E.* Digital Image Processing. – Technosphere. – Moscow, 2012. – 1081 p.

3. *Kalman, R. E.* A New Approach to Linear Filtering and Prediction Problems // J. Basic Eng. – Baltimore, 1960. – Vol. 82, Is. 1. – p. 35–45. DOI: 10.1115/1.3662552

Kac-Ornstein-Uhlenbeck processes

N. Ratanov
Chelyabinsk State University, Russia [1]

Let $\varepsilon = \varepsilon(t) \in \{0, 1\},\ t \geq 0$, be a two-state continuous-time Markov chain switching with alternating intensities $\lambda_0\ \lambda_1 > 0$. Let $(a_0, a_1),\ (\gamma_0, \gamma_1)$ be two pairs of real numbers.
A new class of piecewise deterministic processes is studied, which are defined by the following integral equation

$$X(t) = x + \int_0^t \Big(a_\varepsilon(s) - \gamma_{\varepsilon(s)} X(s)\Big)\,\mathrm{d}s. \tag{1}$$

We call the solution of this equation the Kac-Ornstein-Uhlenbeck process, since under the standard Kac's scaling, i.e., if $\gamma_0, \gamma_1,\ \lambda_0, \lambda_1 \to \infty,\ \gamma_0^2/\lambda_0, \gamma_1^2/\lambda_1 \to \sigma^2$, then the telegraph process $\Gamma(t) = \int_0^t \gamma_{\varepsilon(s)}\mathrm{d}s$ converges to the Brownian motion $W = W_t$, [3], and the process $X = X(t)$ converges to an Ornstein-Uhlenbeck process $\bar{X}$ satisfying the Langevin equation

$$\bar{X}(t) = x + at - \int_0^t \bar{X}(s)\mathrm{d}W_s, \tag{2}$$

(if additionally $a_0, a_1 \to a$). The trajectories of the process $X = X(t)$ are formed by two deterministic patterns

$$\phi_0(t, x) = \mathrm{e}^{-\gamma_0 t}\left(x + a_0 \int_0^t \mathrm{e}^{\gamma_0 s}\mathrm{d}s\right) = \rho_0 + (x - \rho_0)\mathrm{e}^{-\gamma_0 t},$$

$$\phi_1(t, x) = \mathrm{e}^{-\gamma_1 t}\left(x + a_1 \int_0^t \mathrm{e}^{\gamma_1 s}\mathrm{d}s\right) = \rho_1 + (x - \rho_1)\mathrm{e}^{-\gamma_1 t},$$

$\rho_0 = a_0/\gamma_0 \neq \rho_1 = a_1/\gamma_1,\ t \geq 0$, continuously switching from one to the other at random times $\tau_n,\ n \geq 1,\ \tau_0 = 0$.
If the parameters ρ_0 and ρ_1 coincide, $a_0/\gamma_0 = a_1/\gamma_1 =: \rho$, then $X = X(t)$ reduces to the geometric telegraph process:

$$X(t) = \mathrm{e}^{-\Gamma(t)}\left(x + \rho \int_0^t \gamma_{\varepsilon(s)}\mathrm{e}^{\Gamma(s)}\mathrm{d}s\right) = \rho + (x - \rho)\exp(-\Gamma(t)). \tag{3}$$

The properties of such a process are well studied, see [3, 4, 7]. Note that in this case the process X is time-homogeneous in the sense of (2.13), [6].with a rectifying diffeomorphism $\Phi(x) = \log|x - \rho|$. In this case, the distribution of $X(t)$ is determined by the distribution of the telegraph process $\Gamma(t)$. In what follows, we assume $\rho_0 < \rho_1$.

1. Stationary distributions. Let $\gamma_0,\ \gamma_1 > 0$.
Since after almost surely finite transition time the paths of X fall into $(\rho_0,\ \rho_1)$ and remain inside this interval, the invariant measure $\vec{\mu}$ is supported on $[\rho_0,\ \rho_1]$. Let $\alpha_0 = \lambda_0/\gamma_0, \alpha_1 = \lambda_1/\gamma_1,\ \alpha_0, \alpha_1 > 0$.

Theorem 1. *The unique invariant probability measure for $\Xi = (X(t),\ \varepsilon(t)),\ t \geq 0$, has the form of a Beta distribution determined by the probability density functions $\vec{\pi} = (\pi_0(x),\ \pi_1(x)),\ \rho_0 < x < \rho_1$,*

$$\pi_0(x) = \frac{\lambda_1}{\lambda_0 + \lambda_1}(\rho_1 - \rho_0)^{-1}B(\alpha_0, 1 + \alpha_1)^{-1} \cdot \xi_0(x)^{-1+\alpha_0}\xi_1(x)^{\alpha_1},$$

[1] This research was supported the Russian Science Foundation (RSF), project number 22-21-00148, https://rscf.ru/project/22-21-00148/

$$\pi_1(x) = \frac{\lambda_0}{\lambda_0+\lambda_1}(\rho_1-\rho_0)^{-1}B(1+\alpha_0,\alpha_1)^{-1}\cdot\xi_0(x)^{\alpha_0}\xi_1(x)^{-1+\alpha_1}.$$

Here $\xi_0(x) = \frac{x-\rho_0}{\rho_1-\rho_0}$, $\xi_1(x) = 1-\xi_0(x) = \frac{\rho_1-x}{\rho_1-\rho_0}$, *and* $B(\alpha_0,\ \alpha_1)$ *is the Euler beta-function.*
In the attraction-repulsion case $\gamma_0\cdot\gamma_1 < 0$, the invariant distribution exists only if

$$\alpha_0+\alpha_1 < 0.$$

Theorem 2. *If* $\gamma_0 > 0 > \gamma_1$, *then the invariant probability measure for the Kac-Ornstein-Uhlenbeck process* X *is supported on the half-line* $x < \rho_0 = a_0/\gamma_0$, *and the probability density functions* π_0 *and* π_1, *are given by*

$$\pi_0(x) = \frac{\lambda_1}{\lambda_0+\lambda_1}(\rho_1-\rho_0)^{-1}B(-\alpha_0-\alpha_1,\alpha_0)^{-1}[-\xi_0(x)]^{-1+\alpha_0}\xi_1(x)^{\alpha_1}\mathbf{1}_{\{\mathbf{x}<\rho_\mathbf{0}\}},$$

$$\pi_1(x) = \frac{-\alpha_1\gamma_0}{\lambda_0+\lambda_1}(\rho_1-\rho_0)^{-1}B(-\alpha_0-\alpha_1,\alpha_0)^{-1}[-\xi_0(x)]^{\alpha_0}\xi_1(x)^{-1+\alpha_1}\mathbf{1}_{\{\mathbf{x}<\rho_\mathbf{0}\}}.$$

In the case $\gamma_0 < 0 < \gamma_1$, *the invariant measure is supported on the upper half-line* $x > \rho_1$ *and looks similarly.*

2. Exponential functionals Consider the exponential functional of the form

$$\mathcal{G}_{\gamma,a} = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\Gamma(t)}a_{\varepsilon(t)}\mathrm{d}t = \lim_{T\to\infty}\int_0^T \mathrm{e}^{-\Gamma(t)}a_{\varepsilon(t)}\mathrm{d}t, \qquad a.s. \tag{4}$$

It is useful to note that the stationarity of Markov-modulated Ornstein-Uhlenbeck process and the distribution of the corresponding exponential functional are closely related. This problem has been studied in detail, see e.g. [1, 2]. It is interesting to note that this more general setting can be transformed in the particular case of the Kac-Ornstein-Uhlenbeck process driven by a pair of telegraph processes, see [5].

References

1. Behme A. and Sideris A. (2020) Exponential functionals of Markov additive process. *Electron. J. Probab.* **25**, no. 37, 1-25.

2. Behme A. and Sideris A. (2022) Markov-modulated generalized Ornstein-Uhlenbeck processes and an application in risk theory. *Bernoulli* **2**8(2): 1309-1339

3. López O. and Ratanov N. (2014) On the asymmetric telegraph processes. *J. Appl. Probab.*, **51**(2), 569–589.

4. Ratanov N. (2007) A jump telegraph model for option pricing. *Quant. Fin.* **7**, 575–583.

5. Ratanov N. (2022) Kac-Ornstein-Uhlenbeck processes: stationary distributions and exponential functionals. To appear in *Methodol. Comput. Appl. Probab.*

6. Ratanov N, Di Crescenzo A. and Martinucci B. (2019) Piecewise deterministic processes following two alternating patterns. *J. Appl. Prob.* **56**, 1006–1019.

7. Kolesnik A. D. and Ratanov N. (2013) *Telegraph Processes and Option Pricing.* Springer: Heidelberg.

On incentive pricing algorithms under the lack of information about agent utilities

Rokhlin D.B.
Southern Federal University, Rostov-on-Don

We consider a leader, who prices a resource or good, and tries to change the behavior of selfish agents in a desired way. Usually, leader's aim is to stimulate a broadly understood socially optimal behavior. In this case the desired price can be approximated by using dual gradient-based algorithms, which require the information only about agent reactions. We discuss two such cases: resource pricing in communication networks [1], and transfer pricing within a corporation [2].

Let us consider the last case in more detail. Assume that a firm consists from n production and m sales divisions. There are d commodities produced by each production division. The same commodities are saled by each sales division. Denote by $f_i : X_i \mapsto \mathbb{R}_+$, $i = 1, \dots, m$ the revenue functions of the sales divisions, and by $g_i : Y_i \mapsto \mathbb{R}_+$, $i = 1, \dots, n$ the cost functions of the production divisions. A vector $x_i \in X_i$ describes the amounts of commodities to be sold by i-th sales division, and $y_i \in Y_i$ describes the amounts of commodities to be produced by i-th production division.

Assumption 1. The sets X_i, Y_i are convex, compact, and contain $[0, \varepsilon]^d$.

Assumption 2. The functions $f_i : X_i \mapsto \mathbb{R}_+$ (resp., $g_i : Y_i \mapsto \mathbb{R}_+$) are Lipschitz, non-decreasing in each argument, and $f_i(0) = g_i(0) = 0$.

Assumption 3. The functions f_i (resp., g_i) are strongly concave (resp., strongly convex).

The firm announces the commodity *transfer price* vector $\lambda_t \in \mathbb{R}^d_+$ with the obligation to buy the commodities at these prices from the production divisions, and sell them to the sales divisions. Put $\langle a, b\rangle = \sum_{i=1}^d a_i b_i$. Optimal division (agent) reactions are defined by

$$\widetilde{x}_i(\lambda) \in \arg\max_{x_i \in X_i} (f_i(x_i) - \langle \lambda, x_i\rangle), \quad i = 1, \dots, m,$$
$$\widetilde{y}_i(\lambda) \in \arg\max_{y_i \in Y_i} (\langle \lambda, y_i\rangle - g_i(y_i)), \quad i = 1, \dots, n,$$

We will say that the plan $\widetilde{z}(\lambda) = (\widetilde{x}(\lambda), \widetilde{y}(\lambda))$ is stimulated by the transfer price vector λ. The goal of the firm manager is to stimulate the agent reactions coinciding with the optimal solution $z^* = (x^*, y^*)$ of the total profit maximization problem:

$$F(x, y) = \sum_{i=1}^m f_i(x_i) - \sum_{i=1}^n g_i(y_i) \to \max_{(x,y)\in S},$$
$$S = \left\{ (x, y) \in Z : \sum_{i=1}^m x_i = \sum_{j=1}^n y_j \right\}, \quad Z = \prod_{i=1}^m X_i \times \prod_{j=1}^n Y_j.$$

Applying the SOLO FTRL algorithm [3] to the dual problem, we get the recurrence relation

$$\lambda_t = -\frac{\sum_{j=1}^{t-1} \Delta\widetilde{z}(\lambda_j)}{\sqrt{\sum_{j=1}^{t-1} \|\Delta\widetilde{z}(\lambda_j)\|^2}}, \quad \lambda_0 = 0; \quad \Delta\widetilde{z}(\lambda) := \sum_{i=1}^n \widetilde{y}_i(\lambda) - \sum_{i=1}^m \widetilde{x}_i(\lambda).$$

The obtained algorithm uses only the information on division reactions to current prices. It does not depend on any parameters and requires no information on the production and cost functions (from the manager point of view). The next result shows that the optimality gap and feasibility residuals are of order $T^{-1/4}$ in the number T of iterations.

Research was supported by the Regional Mathematical Center of the Southern Federal University with the Agreement № 075-02-2022-893 of the Ministry of Science and Higher Education of Russia.

Theorem 1 *For the average transfer price vector* $\overline{\lambda}_T = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\lambda_t$ *we have*

$$F(z^*) - F(\widetilde{z}(\overline{\lambda}_T)) \le \frac{C}{T^{1/4}}, \quad \|\Delta\widetilde{z}(\overline{\lambda}_T)\| \le \frac{C}{T^{1/4}},$$

where the constant C *depends of* f_i, g_i, X_i, Y_i, $i = 1, \dots, d$.

Similar results were obtained for a dynamic problem, where the functions f_i g_i depend on a sequence of i.i.d. random variables.

The leader also can be selfish. Consider, for example, the product revenue management problem with unknown demand. The main difference with the previous case is that the leader objective function need not be convex, and its gradient is unknown. To overcome the first difficulty we use price discretization and its probabilistic interpretation. Then we use zero-order algorithms for price tuning.

REFERENCES

1. *Rokhlin D.B.* Resource allocation in communication networks with large number of users: the dual stochastic gradient method *Theory of Probability & Its Applications*, **66**:1, (2021), 105–120.
2. *Rokhlin D.B., Ougolnitsky G.A.* SOLO FTRL algorithm for production management with transfer prices *Journal of Mathematical Sciences* (to appear)
3. *Orabona F., Pál D.* Scale-free online learning *Theoretical Computer Science*, **716**, (2018), 50–69.

On Decomposable Semiregenerative Processes and their Application to a Double Redundant Renewable System

V. V. Rykov [1 2 3]

[1] Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University), Moscow, Russia, vladimir_rykov@mail.ru;
[2] Gubkin Russian State University of Oil and Gas (Gubkun University), Moscow, Russia;
[3] Kharkevich Institute for Information Transmision Problems of Russian Academy of Sciences (IITP RAS), Moscow, Russia.

The talk consists from two parts. The first one deals with a short review of the Smith's regenerative idea [1] development. The notion of Decomposable Semi-Regenerative Processes (DSRP), proposed in [2] (see also [3, 4]) as its generalization, is reminded. The review of some previous its applications, which one can find in [3], is also given. In the second part of the talk some new application the DSRP theory is proposed.

1. The model. Notations and Assumptions

Consider a homogeneous repairable double redundant system with arbitrary distributed life and repair times of its components. For the reparable system, at least two different disciplines of its repair are possible: the partial and the full repair discipline. Denote by A_i, B_i, C_i $(i = 1, 2, \dots)$ the life-, partial and full repair times of the system units and a whole system after their failures. Suppose that all these random variables (r.v.'s) are mutually independent and identically distributed (i.i.d.). Thus, denote by $A(t) = \mathbb{P}\{A_i \le t\}$, $B(t) = \mathbb{P}\{B_i \le t\}$ and $C(t) = \mathbb{P}\{C_i \le t\}$ the corresponding cumulative distribution functions (c.d.f.'s). Suppose that the instantaneous failures and repairs are impossible $A(0) = B(0) = C(0) = 0$, and their mean times are finite:

$$a = \mathbb{E}[A_i] < \infty, \quad b = \mathbb{E}[B_i] < \infty, \quad c = \mathbb{E}[C_i] < \infty.$$

Denote by $E = \{i = 0, 1, 2\}$ the set of system states, where i stands for the number of failed units, and introduce a random process $J = \{J(t),\, t \ge 0\}$, where

$$J(t) = \{\text{number of failed units at time } t.\}.$$

In the talk the reliability function $R(t)$, time-dependent system state probabilities (t.d.s.p.'s) $\pi_j(t) = \mathbb{P}\{J(t) = j]\}$ $(j = 0, 1, 2)$, and the steady state probabilities (s.s.p.'s) $\pi_i = \lim\limits_{t\to\infty} \pi_j(t)$ $(j = 0, 1, 2)$, are studied.

2. The Modified Moment Generation Functions

The following notations will be used further.

- The moment generation functions (m.g.f.'s) of the r.v.'s are:

$$\tilde{a}(s) = \mathbb{E}\left[e^{-sA}\right] = \int\limits_0^\infty e^{-sx}dA(x), \quad \tilde{b}(s) = \mathbb{E}\left[e^{-sB}\right] = \int\limits_0^\infty e^{-sx}dB(x),$$

- The modified moment generation functions (m.m.g.f.'s) are:

$$\tilde{a}_B(s) = \int_0^\infty e^{-sx}B(x)dA(x), \qquad \tilde{b}_A(s) = \int_0^\infty e^{-sx}A(x)dB(x). \quad (1)$$

- Corresponding truncated expectations are:

$$a_B = \int_0^\infty xB(x)dA(x), \quad b_A = \int_0^\infty xA(x)dB(x). \quad (2)$$

- The probabilities $\mathbb{P}\{B \le A\}$ and $\mathbb{P}\{B \ge A\}$ are associated with m.m.g.f.'s as:

$$\tilde{a}_B(0) = \mathbb{P}\{B \le A\} \equiv p, \quad \tilde{b}_A(0) = \mathbb{P}\{B > A\} \equiv q = 1 - p.$$

- Note the property of transformations (1):

$$\tilde{a}_{1-B}(s) = \tilde{a}(s) - \tilde{a}_B(s), \quad \tilde{b}_{1-A}(s) = \tilde{b}(s) - \tilde{b}_A(s). \quad (3)$$

3. Main results

The Laplace Transform (LT) $\tilde{R}(s)$ of the system reliability function $R(t)$ has been found in terms of m.g.f.'s and m.m.d.f.'s of the initial r.v.'s and contains in the following theorem [5].

Theorem 1. *The LT $\tilde{R}(s)$ of the system reliability function $R(t)$ does not depend on the repair disciplines and has the form*

$$\tilde{R}(s) = \frac{(1-\tilde{a}(s))(1+\tilde{a}(s)-\tilde{a}_B(s))}{s(1-\tilde{a}_B(s))}. \quad (4)$$

From the theorem it follows that the mean system lifetime is $\tilde{R}(0) = \frac{a}{q}$.

The LTs of the t.d.s.p.'s has been obtained in [6], for the system under partial repair discipline and in [7] for the system under full repair discipline. However, they have rather complex expressions, and will be represented in the full talk, but are omitted here.

The appropriate s.s.p.'s for the system under partial repair discipline has been found in [7] and are given in the following theorem

Theorem 2. *The s.s.p.'s for the system under partial repair discipline are:*

$$\pi_0 = \quad 1 - \tfrac{b}{a_B + b_A}, \quad \pi_1 = \tfrac{a+b}{a_B + b_A} - 1, \quad \pi_2 = 1 - \tfrac{a}{a_B + b_A}. \tag{5}$$

At least for the system under full repair discipline the following theorem holds

Theorem 3. *The s.s.p.'s for the system under full repair discipline are:*

$$\pi_0 = \frac{aq + a_B + b_A - b}{a + q(a+c)}, \quad \pi_1 = \frac{a + b - (a_B + b_A)}{a + q(a+c)}, \quad \pi_2 = \frac{cq}{a + q(a+c)}. \tag{6}$$

Acknowledgments. The publication has been prepared with the support of the "RUDN University Program 5-100" and the RFFI grant No. 20-01-00575A.

References

1. W.L. Smith. Regenerative stochastic processes. Proc.of Royal Soc., Ser. A, **232** (1955)

2. V.V. Rykov. Regenerative processes with embedded regeneration periods and their application for priority queueing systems investigation. *Cybernetics*, No. 6 (1975), pp. 105-111. Kiev, 1975. (In Russian)

3. V.V. Rykov. Decomposable Semi-Regenerative Processes and their Applications. LAMPERT Academic Publishing. 2011, 75pp.

4. V. V. Rykov. Decomposable Semi-Regenerative Processes: Review of Theory and Applications to Queueing and Reliability Systems. // RTA # 2 (62), vol 16, June 2021, pp/ 157-190/

5. V. V. Rykov, On Reliability of a Double Redundant Renewable System, *Springer Nature Switzerland AG 2020, M. Gribaudo et al. (Eds.): ASMTA 2019, LNCS 12023, pp. 1–9, 2020. https://doi.org/10.1007/978-3-030-62885-7_3.*

6. V. Rykov, D. Efrosinin, N. Stepanova, and Ja. Sztrik, On Reliability of a Double Redundant Renewable System with a Generally Distributed Life and Repair Times, // Mathematics 2020, 8, 278; doi:10.3390/math8020278, www.mdpi.com/journal/mathematics.

7. V. V. Rykov, N. M. Ivanova. On Reliability of a Double Redundant System under Full Repair Scenario. // PROCEEDINGS of An International Conference and Demographics 2021 Workshop. Virtual 1 - 4 June 2021 (ASMDA 2021), edited by Christos H Skiadas. http://www.asmda.es/asmda2021.html

M.M. Shumafov, V.B. Tlyachev, T.A. Panesh, M.A. Havaja

(Adyghe State University, Republic of Adygea, Russian Federation)

On the stability in probability of solutions of certain stochastic differential equations of the second order

Over the last five decades the theory of differential equations (SDE) has significantly developed in the works of numerous authors. Many fundamental results concerning the stability property of SDE were obtained in pioneering works of Kushner [1] and [2] Khasminskii by Lyapunov-like functions method (see also surveys [3], [4]).

In the present talk we derive sufficient conditions of asymptotic stability in probability in the large of equilibrium position of the second-order SDEs which are typical in the theory of nonlinear dynamics.

Let us present one of the results.

Consider a stochastic generalized Rayleigh's equation written as a two-dimensional system of Ito's SDEs

$$dx(t) = y(t)dt,\ dy(t) = \left[-f(y) - g(x)\right]dt + \sigma(y)d\xi, \tag{1}$$

where the functions f, g and σ satisfy the Lipschitz condition, and $f(0) = g(0) = \sigma(0) = 0$.

Theorem. *Suppose that there exist numbers* $b > 0$ *and* σ_0 *such that*

1) $f(y)/y > b$ *for all* y,
2) $xg(x) > 0$ *for all* $x \neq 0$,
3) $\int_0^x g(s)ds \to +\infty$ *for* $|x| \to \infty$,
4) $0 < \sigma(y)/y < \sigma_0^2$, *and* $\sigma_0^2 < 2b$.

Then the trivial solution $(x(t) \equiv 0,\ y(t) \equiv 0)$ *of the system* (1) *is asymptotically stable in probability in the large.*

The proof of the above theorem is based on the use of Lyapunov-like method of auxiliary functions developed for SDEs [1, 2].

References

1. Kushner, H.J. *Stochastic stability and Control*. N.Y. – London: Academic Press, 1967.
2. Khas'minskii, R.Z. *Stochastic Stability of Differential Equations*, 2nd ed., Springer: Heidelberg Dordrecht London New York, 2012. 339p. (Translation of the Russian edition, Moscow, Nauka, 1969).
3. Visentin, F. A. *Survey on Stability for Stochastic Differential Equations* // Scientiae Mathematicae Japonicae, 2013, **76**, No. 1, pp. 147–152.
4. Shumafov, M.M. *Second-Order Stochastic Differential Equations: Stability, Dissipativity, Periodicity*. I. – *A Survey* // The Bulletin of the Adyghe State University. Ser. "Natural-Mathematical and Technical Sciences". Iss. 4. 2019. P. 11–27.

GENERALIZATION OF ONE RESULT OF V.V. SENATOV FOR THE DENSITY FUNCTION OF THE NORMALIZED SUM

V.N. SOBOLEV, A.E. CONDRATENKO

The introduction of a parameter to improve estimates in the Central Limit Theorem was proposed by H. Prawitz [1]. His result has been generalized by I.G. Shevtsova [4].

V.V. Senatov in [2] has obtained two expansions for the density function of the normalized sum from the Central Limit Theorem. In this expansions the last known moment of the initial distribution P is included in the main part of the expansion with some parameter. This allows to obtain the best explicit estimate of the remainder.

We generalize Senatov's results in the following theorem, which uses new asymptotic expansions [3] in the Central Limit Theorem as a basis. The proof of this result is based on the work [5].

Theorem. *Let independent identically random variables* $\xi,\ \xi_1,\ \xi_2, \ldots$ *with zero mean and unit variance have symmetric around zero probability distribution* P *with the finite moment* $\mathrm{M}\xi^{m+2}$ *of even order* $m+2 \geqslant 2$, *the real characteristic function* $f(t)$ *for which there is some positive number* $\nu > 0$ *that the function* $|f(t)|^{\nu}$ *is integrable on the whole real line. Then a the density function* $p_n(x)$ *of the normalized sum* $(\xi_1 + \cdots + \xi_n)\, n^{-1/2}$ *for* $n \geqslant \max\{\nu, m\}$, *all real* x *and* $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$ *can be approximated as*

$$\left| p_n(x) - \phi(x) - \phi(x) \sum_{s=1}^{m/2} C_n^s \sum_{l=4s}^{m-4+4s} \frac{\Theta_{s,l}}{n^{l/2}} H_l(x) - \frac{\theta_{m+2}^{(\lambda)}}{n^{m/2}} \phi(x) H_l(x) \right| \lesssim \frac{\overline{\lambda}}{(m+2)!} \frac{\mathrm{M}\xi^{m+2}}{n^{m/2}} B_{m+2}\,,$$

where $\varphi(x)$ *is the probability density function of the standardized normal distribution,* B_{m+2} *is the moment of even order* $m+2$ *of the standard normal distribution divided by* $\sqrt{2\pi}$, $H_k(x) = (-1)^k \varphi^{(k)}(x)/\varphi(x)$ *is the Chebyshev-Hermite polynomials of degree* k *and* $\overline{\lambda} = \max\{\lambda;\, 1-\lambda\}$,

$$\theta_k = \sum_{j=0}^{[k/2]} \frac{(-1)^j}{2^j\, j!} \frac{\mathrm{M}\xi^{k-2j}}{(k-2j)!}, \qquad \theta_{m+2}^{(\lambda)} = \theta_{m+2} - \frac{(1-\lambda)}{(m+2)!} \mathrm{M}\xi^{m+2}, \qquad \Theta_{s,l} = \sum_{k_1+\cdots+k_s=l} \theta_{k_1} \cdots \theta_{k_s}\,,$$

where the sum is over all partitions of the integer $l = k_1 + \ldots + k_s$ *when* $k_j \geqslant 4$, $j = 1, \ldots, m-1$.

References

[1] H.Prawitz, "Noch einige Ungleichungen fur charakteristische Funktionen", *Scand. Actuar. J.*, **1**, 49-73, (1991).

[2] V.V. Senatov, "On the real accuracy of approximation in the central limit theorem. II", *Siberian Adv. Math.*, **27**, No. 2, 133-152, (2017).

[3] V.V. Senatov, V.N. Sobolev , "New forms of asymptotic expansions the central limit theorem", *Theory Probab. Appl.*, **57**, No. 1, 82-96, (2013).

[4] I.G. Shevtsova, "On the accuracy of the approximation of the complex exponent by the first terms of its Taylor expansion with applications", *J. Math. Anal. Appl.*, **418**, No. 1, 185-210 (2014).

[5] V.N. Sobolev, A. E. Condratenko "Generalization of one result of V.V. Senatov of characteristic functions of convolutions of probability", *XXXVI International Seminar on Stability Problems for Stochastic Models, Petrozavodsk, June 21 -- 25,* (2021).

Probability characteristics of the networks of the bistable Hodgkin-Huxley-type of models with noise

Stankevich N.V., Shchegoleva N.A.

HSE University, Nizhny Novgorod

stankevichnv@mail.ru

Hodgkin-Huxley-type of models are used for mathematical modeling of the dynamics of a single neuron [1]. These models demonstrate various types of oscillatory behavior, including stable equilibrium (resting state), spike and bursting oscillations (oscillatory activity). These models are described by ordinary nonlinear differential equations and are characterized by various phenomena, including multistability, when several dynamic modes coexist in the system [2]. The influence of noise on multistable systems is one of the classical problems considered in the framework of the theory of nonlinear dynamical systems [3].

In the frame of this work, we will consider the features of a network of Hodgkin-Huxley-type of models with bistability in the presence of noise. As a base model, we consider the modified Sherman model [4]:

$$\begin{aligned}
&\tau\dot{V} = -g_{Ca}m_\infty(V)(V-V_{Ca}) - g_K n(V-V_K) - g_{K2}p_\infty(V-V_K) - g_S S(V-V_K),\\
&\tau\dot{n} = \sigma(n_\infty(V)-n),\\
&\tau_S\dot{S} = S_\infty(V) - S.
\end{aligned} \tag{1}$$

Here, the dynamic variable V is the membrane potential, n is interpreted as the probability of opening potassium channels, and S is a slow variable in the system that can describe the concentration of calcium ions in the cell. In general form we will use dynamical variable $x = (V, n, S)$.

The sigmoidal functions m_∞, n_∞, and S_∞ describe the opening probabilities of fast and slow potassium channels:

$$\omega_\infty(V) = [1 + exp\frac{V_\omega - V}{\theta_\omega}]^{-1}, \omega = m, n, S. \tag{2}$$

The function p_∞ describes opening probability of pathological potassium channel, which provide bistability in the model:

$$p_\infty(V) = [exp\frac{V - V_\omega}{\theta_\omega} + exp\frac{V_\omega - V}{\theta_\omega}]^{-1}. \tag{3}$$

The conductivities of calcium and potassium ion channels correspond to the following values: $g_{Ca} = 3.6$, $g_K = 10.0$ and $g_{K2} = 0.2$. The Nernst potentials (threshold potentials for ion channel activation) are fixed as follows: $V_{Ca} = 25$ mV and $V_K = 75$ mV. Another parameters fixed as: $\tau = 0.02$, $\tau_S = 35$, $\sigma = 0.93$, $V_m = -20.0$, $\theta_m = 12.0$, $V_n = -16.0$, $\theta_n = 5.6$, $V_S = -35.0$, $\theta_S = 10.0$, $V_p = -47.0$, $\theta_p = 1.0$. Model (1) demonstrates the bistability between the equilibrium state and the bursting attractor. For initial condition $x_1 = (-49.084, 0.027105, 0.19648)$ stable equilibrium exists, for initial conditions $x_2 = (-49, 0.02, 0.17)$ bursting attractor can be obtained.

Theorem. For any $x \in R^3$ exists and unique solution of system (1) with initial condition x_1 or x_2. Stable equilibrium point x_1 is stable focus.

In [5] it is shown that when noise is added to the system, classical switching between attractors is not observed; when a certain noise level is reached, the system from the equilibrium state passes to the bursting attractor and then remains on it. This feature is due to the fact that the attractor is distant from the equilibrium state in the direction of the dynamic variable S.

Now we consider a network of similar oscillators whose dynamics was studied in [6] with the addition of white noise. In this case it possible to find certain interval of coupling strength when stable equilibrium point will dominate.

The work was supported by Russian Science Foundation (Project No. 20-71-10048).

References

[1] Izhikevich, E. M. (2007). Dynamical systems in neuroscience. MIT press.

[2] Malashchenko, T., Shilnikov, A., Cymbalyuk, G. (2011). PLoS One, 6(7), e21782.

[3] Zakharova, A., Kurths, J., Vadivasova, T., Koseska, A. (2011). PloS one, 6(5), e19696.

[4] Stankevich, N., Mosekilde, E. (2017). Chaos, 27(12), 123101.

[5] Stankevich, N., Mosekilde, E., Koseska, A. (2018). The European Physical Journal Special Topics, 227(7), 747-756.

[6] Stankevich, N., Koseska, A. (2020). Chaos, 30(1), 013144.

Sukhinov A. I., Protsenko S. V. (Rostov-on-Don, Russia). **Building of turbulent exchange model for coastal systems on the basis of expedition data statistical analysis.**

The frequency intervals of turbulent fluctuations and surface and internal waves overlap to a large extent, so that in the frequency range common to turbulence and waves, in order to assess the characteristics of turbulence as such (defined as a part of natural fluctuations incoherent with waves, not only the above-mentioned mechanical and electrical noises, but also fluctuations, must be filtered out from the recording of ADCP readings, created by waves. It is possible to filter out fluctuations created by surface waves if synchronously with complete natural fluctuations of the sea surface level (or pressure fluctuations at some depth). The hydrophysical ADCP probe Workhorse Sentinel 600 was used to measure the three-dimensional velocity vector of the water medium. The problems of decomposition of series of empirical data obtained using ADCP into an evolutionary component and cyclic components belong to the class of inverse problems of processing and interpretation of experimental data. Correction is a special case of a more general decomposition problem, when a cyclic component with a period of regular excitement is allocated. The remaining component is called the adjusted series.

In inverse problems, the observed value is the initial series of instantaneous velocity pulsations, i.e. the result of addition (multiplication, for multiplicative models) adjusted series and cyclic component. In other words, the consequence is known – the result of addition, and it is required to determine the causes – individual terms. For wave fluctuations of the indicator, the same consequence can be caused by completely different, moreover, even opposite reasons.

Waveform recording of sea surface deviations as a function of time makes it possible to determine a number of statistical characteristics: mean, variance, standard deviation, etc. One of the main statistical characteristics of the wave is the standard deviation of the sea surface σ_η, determined by the ratio

$$\sigma_\eta = \bar{\eta}_0^2 = \frac{1}{T_L}\int_0^{T_L} \eta_0^2 dt,$$

where η_0 is the deviation relative to the mean sea level in a short time interval, T_L is the full length of the record. For a group of simple harmonic waves with amplitude a, the standard deviation is equal to $\sigma_\eta = \bar{\eta}_0^2 = \frac{a^2}{2}$. For a superposition of a large number of simple harmonic waves with a random phase $\sigma_\eta = \frac{1}{2}\sum_{n=L}^{\infty} a_n^2$. The wave energy per unit area is equal to $E = \frac{g\rho}{2}\sum_{n=L}^{\infty} a_n^2 = g\rho\sigma_\eta$. The study of waves ultimately boils down to the identification of statistical patterns, which are numerically expressed by the dependencies between the elements of waves and their determining factors.

Comment. Based on the processing of data obtained using the ADCP probe, it was revealed that the characteristic length of a regular wave for the Azov Sea is 15-25 meters, and the characteristic speed is 0.1 – 0.2 m/s, the maximum is 0.51 – 0.77 m/s. The data obtained by modeling are consistent with the data provided by the Unified State System of Information on the Situation in the World Ocean.

REFERENCES

1. *Gushchin V. A., Nikitina A. V., Semenyakina A. A., Sukhinov A. I., Chistyakov A. E.* A model of transport and transformation of biogenic elements in the coastal system and its numerical implementation. Comput. Math. Math. Phys., 58:8 (2018), 1316-1333.

This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research (project 20-01-00421).

LIMITING THEOREM FOR SPECTRA OF ADJACENCY AND LAPLASE MATRICES OF RANDOM GRAPHS

A. TIKHOMIROV[2]

We consider not oriented simple graph (without loops and with simple edges) V, E with vertices $|V| = n$ and set of edges E such that edges $e \in E$ are independent and have probability p_e and weight w_e. Consider the adjacency $n \times n$ matrix

$$\mathbf{A} = \left[A_{jk}\right], \text{ where } A_{jk} = \begin{cases} 0, & \text{if } (j,k) \notin E, \\ 1, & \text{if } (j,k) \in E. \end{cases}$$

Define degree of vertex $i \in V$ as $d_i := \sum_{j:\{i,j\}\in E} \xi_{ij}$. We shall assume that A_{ij} for $1 \le i \le j \le n$ are independent and $\mathbb{E}A_{ij} = p_{ij}(n) =: p_{ij}$.

We introduce the diagonal matrix $D = \operatorname{diag}(d_1, \ldots, d_n)$ and Laplace matrix of not weited graph G, $\mathbf{L} = \mathbf{D} - \mathbf{A}$. We shall assume that matrix $\mathbf{A}$ is symmetry, i.e. $A_{ij} = A_{ji}$, and that r.v.'s A_{ij} for $1 \le i \le j \le n$ are independent. We shall consider as well weigthed graphs $\widetilde{G} = (V, E, w)$ with weight function $w_{ij} = w_{ji} = X_{ij}$ for $1 \le i \le j \le n$ independent random variables s.t. $\mathbb{E}X_{ij} = 0, \quad \mathbb{E}X_{ij}^2 = \sigma_{ij}$. We introduce the quanities

$$a_n = \frac{1}{n}\sum_{i,j=1}^{n} p_{ij}\sigma_{ij}^2, \text{ and } \widehat{a}_n = \frac{1}{n}\sum_{i,j=1}^{n} p_{ij}(1-p_{ij}).$$

The quantity a_n intereprete as expected mean degree of weighted graph $\widetilde{G}$. With graph $\widetilde{G}$ we consider the adjancy matrix $\widetilde{\mathbf{A}} = \left[A_{ij}X_{ij}\right]$ and Laplase or Markov matrix $\widetilde{\mathbf{L}} = \widetilde{\mathbf{D}} - \widetilde{\mathbf{A}}$, where $\widetilde{\mathbf{D}} = \operatorname{diag}(\widetilde{d}_1, \ldots, \widetilde{d}_n)$ and $\widetilde{d}_i = \sum_{j:j\ne i} A_{ij}X_{ij}$. We shall denote by $\lambda_1(\mathbf{B}) \ge \lambda_2(\mathbf{B}) \ge \cdots \ge \lambda_n(\mathbf{B})$ ordered eigenvalues of symmetric $n \times n$ matrix $\mathbf{B}$. We shall consider spectrum of matrix $\frac{1}{\sqrt{a_n}}\widetilde{\mathbf{A}}$, $\frac{1}{\sqrt{a_n}}\widetilde{\mathbf{L}}$, $\widehat{\mathbf{A}} = \frac{1}{\sqrt{\widehat{a}_n}}(\mathbf{A} - \mathbb{E}\mathbf{A})$ and $\widehat{\mathbf{L}} = \frac{1}{\sqrt{\widehat{a}_n}}(\mathbf{L} - \mathbb{E}\mathbf{L})$. For bravity of notation we shall write $\widetilde{\lambda}_j = \lambda_j(\widetilde{\mathbf{A}})$, $\widehat{\lambda}_j = \lambda_j(\widehat{\mathbf{A}})$, $\widetilde{\mu}_j = \lambda_j(\widetilde{\mathbf{D}})$, and $\widehat{\mu}_j = \lambda_j(\widehat{\mathbf{D}})$. Introduce corresponding empirical spectral distributions

$$\widehat{F}_n(x) := \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \mathbb{I}\{\widehat{\lambda}_j \le x\}, \quad \widetilde{F}_n(x) := \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \mathbb{I}\{\widetilde{\lambda}_j \le x\},$$

$$\widehat{G}_n(x) := \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \mathbb{I}\{\widehat{\mu}_j \le x\}, \quad \widetilde{G}_n(x) := \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \mathbb{I}\{\widetilde{\mu}_j \le x\}.$$

In the paper [1], 2006, was shown that under condition $p_{ij} \equiv 1$ and $\sigma_{ij}^2 \equiv 1$ for any $1 \le i, j \le n$ that ESD $G_n(x)$ weakly convergence in probability to the nonrandom

---

Key words and phrases. Wigner law, random graph, normal law, Stieltjes transform
.

2)Institute of Physics and of Mathematics, Komi Science Center of Ural Division of RAS, Syktyvkar State University, Russia

distribution function $G(x)$, which defined as free convolution of Gaussian distribution function and semicircular distribution function.

In [3], 2010, authors considered the limit of $G_n(x)$ for weighted Erdös – Renyi graphs ($p_{ij} \equiv p_n$) and equivariance weights ($\sigma_{ij} \equiv \sigma^2$). Assuming that p_n bounded away from zero and one, and that random variables X_{ij} have the fourth moment, proved that $G_n(x)$ weakly convergence to the same function $G(x)$.

In [5], 2020, Yizhe Zhu consider the so calle graphon approach (the descrition see below) to limiting spectral distribution of Wigner–type matrices. He discribe the moments of limit spectral measure in term of graphon of profile of variance matrix $\Sigma = (\sigma_{ij})$ and number of trees with fixed number of vertices. Recently Chatterjee and Hazra published the paper [2] in which developed the approach of Zhu.

First we formulate some conditions which we shall use in the present paper.

- Condition $CP(0)$: $a_n \to \infty$, as $n \to \infty$ and
$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} |\frac{1}{a_n}\sum_{j=1}^{n} p_{ij}\sigma_{ij}^2 - 1| = 0, and$$
- Condition $CX(1)$: For any $\tau > 0$
$$L_n(\tau) := \frac{1}{a_n}\sum_{i,j=1}^{n} p_{ij}\mathbb{E}X_{ij}^2\mathbb{I}\{|X_{ij}| > \tau\sqrt{a_n}\} \to 0 \text{ as } n \to \infty, \tag{0.1}$$

The main result of the present paper is the following theorem.

Theorem 0.1. *Let conditions $CP(0)$, $CX(1)$ hold. Then*

- *ESD's $F_n(x)$ weakly convergence in probability to the semi-circular distribution function,*
$$\lim \widetilde{F}_n(x) = F(x) \text{ and } \lim \widehat{F}_n(x) = F(x) \text{ in probability.}$$
- *ESD's $\widetilde{G}_n(x)$ convergence in probability to the distribution function $G(x)$, which is additive free convolution of standard normal distribution function and semi-circular distribution function,*
$$\lim \widetilde{G}_n(x) = G(x) \text{ and } \lim \widetilde{G}_n(x) = G(x) \text{ in probability..}$$

References

[1] Wloodzimer Bryc, Amir Dembo, Tiefeng Jiang (2006) Spectral Measure of Large Random Hankel, Markov and Toeplitz Matrices. *The Annals of Probability*, **34, No 1, 1–38.**

[2] Anirban Chatterjee, Rajat Subhra Hazra (2021) Spectral Properties for the Laplacian of a Generalized Wigner Matrices. **Arxiv:2011.07912v2**

[3] Xue Ding, Tiefeng Jiang (2010) Spectral Distribution of Adjancency Matrix and Laplacian Matrices of Random Graphs. *The Annals of Applied Probability*, **vol. 20, No. 6, 2086–2117**

[4] Fernando L. Metz, Jeferson D. Silva (2020) Spectral density of dense networks and the breakdown of the Wigner semicircle law. *Physical review research*,**vol.2**, 043116.

[5] Yizhe Zhu (2020) A Graphon Approach to Limiting Spectral Distribution of Wigner-Type Matrices. *Random Structure&Algorithms*, **56(1), 251–279**

[6] A.N. Tikhomirov (2021). On the Wigner law for Generalized Erdös–Renyi Random Graphs. *Siberian Advances in Mathematics,* **vol. 31, No. 4, pp. 229–236.**

Branching processes in non-favorable environment

V.A.Vatutin, E.E.Dyakonova
Steklov Mathematical Institute (Moscow)

Let $\mathcal{Z} = \{Z_n,\ n = 0, 1, 2, ...\}$ be a critical branching process evolving in a random environment generated by a sequence $\{F_n(s), \quad s \in [0,1], n = 1, 2, ...\}$ of i.i.d. probability generating functions. Denote $X_i = \log F_i'(1), i = 1, 2, ...$ and introduce a random walk

$$S_0 = 0, \quad S_n = X_1 + ... + X_n,\ n \geq 1.$$

We impose the following restrictions on the characteristics of the process.

Assumption B1. The random variables $X_n, n = 1, 2, ...$ are independent and identically distributed with

$$\mathbf{E}X_1 = 0, \quad \sigma^2 = \mathbf{D}X_1 \in (0, \infty).$$

Besides, the distribution of X_1 is non-lattice.

Assumption B2. There is an $\varepsilon > 0$ such that

$$\mathbf{E}\left(\log^+ \frac{F_1''(1)}{(F_1'(1))^2}\right)^{2+\varepsilon} < \infty.$$

Theorem 1 *Let Assumptions B1-B2 be valid. If $\varphi(n), n = 1, 2, ...$ is a sequence of positive numbers such that $\varphi(n) \to \infty$ as $n \to \infty$ and $\varphi(n) = o(\sqrt{n})$, then there is a constant $\Theta \in (0, \infty)$ such that*

$$\mathbf{P}(Z_n > 0; S_n \leq \varphi(n)) \sim \frac{\Theta\varphi^2(n)}{n^{3/2}}, \quad n \to \infty.$$

Theorem 1 compliments Theorem 1.1 in [1] where it was shown that there is a constant $C \in (0, \infty)$ such that $\mathbf{P}(Z_n > 0) \sim C\sqrt{n}$ as $n \to \infty$.

References

[1] Geiger, J., Kersting, G. The survival probability of a critical branching process in random environment. Theory Probab. Appl., 2001, 45:3, 517–525.

Decompositions of Finitely Additive Markov Chains and Asymptotics of their Components*

Alexander Zhdanok[1], Anna Khuruma[2]

[1]Institute for Information Transmission Problems RAS, Moscow, Russia; zhdanok@iitp.ru
[2]Tuvan State University, Kyzyl, Russia; huruma@list.ru

We consider Markov chains (MC) defined by the transition probability (kernel) which is finitely additive. Such Markov chains were constructed by S. Ramakrishnan [1] within the concepts and symbolism of the game theory. We study such MCs using the operator approach. In our work, the state space (phase space) of the MC has any cardinality, and the sigma-algebra is discrete.This construction of the phase space allows us to decompose the Markov kernel (and the Markov operators it generates) into the sum of two components - countably additive and purely finitely additive. Some asymptotic regularities of such MCs were revealed. In our previous papers [2],[3] and [4] we also study Markov sequences of finitely additive measures. However, they are generated by operators with a countably additive kernel extended to the space of finitely additive measures.

1 Definitions, Notation and Some Constructions

Let X be an arbitrary infinite set and Σ the sigma-algebra of its subsets. Let $B(X, \Sigma)$ denote the Banach space of bounded Σ -measurable functions $f : X \to R$ with sup-norm.

We also consider Banach spaces of bounded measures $\mu : \Sigma \to R$, $ba(X, \Sigma)$ is the space of finitely additive measures, $ca(X, \Sigma)$ is the space of countably additive measures, $pfa(X, \Sigma)$ is the space of purely finitely additive measures.

The Yosida-Hewitt decomposition is known: Any finitely additive measure μ can be uniquely decomposed into the sum $\mu = \mu_{ca} + \mu_{pfa}$, where μ_{ca} is countably additive and μ_{pfa} is a purely finitely additive measure.

We denote the sets of non-negative measures: $V_{ba} = \{\mu \in ba(X, \Sigma) : \mu(X) \leq 1\}, V_{ca} = \{\mu \in ca(X, \Sigma) : \mu(X) \leq 1\}, V_{pfa} = \{\mu \in pfa(X, \Sigma) : \mu(X) \leq 1\}$.

Measures from these sets will be called probabilistic if $\mu(X) = 1$.

We also denote by S_{ba}, S_{ca}, S_{pfa} the sets of all probability measures in V_{ba}, V_{ca}, V_{pfa}, respectively.

Definition 1 *The finitely additive Markov chains (MC) on a measurable space (X, Σ) are given by their transition function (probability kernel) $P(x, E), x \in X, E \in \Sigma$, under the conditions:*

1) $0 \leq P(x, E) \leq 1, \forall x \in X, \forall E \in \Sigma$;
2) $P(\cdot, E) \in B(X, \Sigma), \forall E \in \Sigma$;
3) $P(x, \cdot) \in ba(X, \Sigma), \forall x \in X$;
4) $P(x, X) = 1, \forall x \in X$.

We emphasize that the transition function of the classical Markov chain is a countably additive measure in the second argument.

*This research was funded by the Russian Foundation of Basic Research, project number 20-01-00575-a.

The transition function generates Markov linear integral operator:
$A : ba(X, \Sigma) \to ba(X, \Sigma), (A\mu)(E) = A\mu(E) = \int\limits_X P(x, E)\mu(dx), \forall \mu \in ba(X, \Sigma), \forall E \in \Sigma.$

Let the initial measure be $\mu^1 \in S_{ba}$. Then the iterative sequence of finitely additive probability measures $\mu^{n+1} = A\mu^n \in S_{ba}, n \in N$, is usually identified with the Markov chain. We will call $\{\mu^n\}$ a Markov sequence of measures.

Definition 2 *A topological space (X, τ) is called discrete if all its subsets are simultaneously open and closed (clopen), that is, the topology $\tau = 2^X$ - the set of all subsets of the set X.*

If a topological space is discrete, then, obviously, its Borel sigma-algebra $\mathfrak{B} = \tau = 2^X$. Such a sigma-algebra in X is also called discrete. We will denote it by Σ_d.

Proposition 1 *Let an arbitrary discrete space (X, Σ_d) be given. Any Markov finitely additive kernel $P(x, E)$ on (X, Σ_d) is uniquely representable as the sum of a sub-Markov countably additive kernel $P_{ca}(x, E)$ and a sub-Markov purely finitely additive kernel $P_{pfa}(x, E)$, for all $x \in X$ and $E \in \Sigma_d$:*

$$P(x, E) = P_{ca}(x, E) + P_{pfa}(x, E),$$

where $P_{ca}(x, \cdot) \in ca(X, \Sigma_d), P_{pfa}(x, \cdot) \in pfa(X, \Sigma_d)$, and $P_{ca}(\cdot, E) \in B(X, \Sigma_d)$, $P_{pfa}(\cdot, E) \in B(X, \Sigma_d)$.

Proposition 1 makes it possible to introduce integral sub-Markov operators A_{ca} and A_{pfa} generated by the corresponding measurable subkernels and $A = A_{ca} + A_{pfa}$.

Definition 3 *We call a finitely additive MC on an arbitrary discrete space (X, Σ_d) combined if its transition functionsatisfies the conditions: $P_{ca}(x, X) = q_1, P_{pfa}(x, X) = q_2$ for all $x \in X$, where $0 \leq q_1, q_2 \leq 1$, $q_1 + q_2 = 1$.*

2 Main results

Everywhere below we consider a combined non-degenerate finitely additive MC on an arbitrary discrete space (X, Σ_d).

Let there be given an arbitrary initial probability measure $\mu^1 \in S_{ba}$, $\mu^1 = \mu^1_{ca} + \mu^1_{pfa}$.

Take the second iteration in the Markov sequence of measures $\mu^2 = A\mu^1$. Then

$$\begin{aligned}\mu^2 = \mu^2_{ca} + \mu^2_{pfa} = A\mu^1 = (A_{ca} + A_{pfa})(\mu^1_{ca} + \mu^1_{pfa}) \\ = A_{ca}\mu^1_{ca} + A_{ca}\mu^1_{pfa} + A_{pfa}\mu^1_{ca} + A_{pfa}\mu^1_{pfa}. \quad (1)\end{aligned}$$

In the last four terms of the decomposition (1), the first is a countably additive measure, the third and fourth are purely finitely additive measures.

The second term $A_{ca}\mu^1_{pfa}$ can be a measure of any type. Consider two corresponding main cases - disjoint conditions (H_1) and (H_2).

$$(H_1) \qquad A_{ca}(V_{pfa}) \subset V_{ca},$$

that is, the operator A_{ca} transforms all purely finitely additive measures from V_{pfa} into countably additive measures. MCs satisfying this condition (H_1) exist.

Theorem 1 *Let condition (H_1) be satisfied for some MC. Then for any initial measure $\mu^1 \in S_{ba}$, for any $n \in N$,*

$$\|\mu^{n+1}_{ca}\| = q_1, \quad \|\mu^{n+1}_{pfa}\| = q_2.$$

We now give the second condition (H_2) related to the decomposition in (1).

$$(H_2) \qquad A_{ca}(V_{pfa}) \subset V_{pfa},$$

that is, the operator A_{ca} transforms all purely finitely additive measures from V_{pfa} into purely finitely additive measures. Such MC exist.

Theorem 2 *Let condition (H_2) be satisfied for some MC. Then, for any initial finitely additive measure $\mu^1 \in S_{ba}$, for any $n \in N$*

$$\|\mu_{ca}^{n+1}\| = q_1^n \cdot \|\mu_{ca}^1\|, \quad \|\mu_{pfa}^{n+1}\| = 1 - q_1^n \cdot \|\mu_{ca}^1\|.$$

Corollary 1 *Let the conditions of Theorem 2 be satisfied. Then for any finitely additive initial measure $\mu^1 \in S_{ba}$ for the components of the Markov sequence of measures generated by it $\mu^{n+1} = A\mu^n$ as $n \to \infty$,*

$$\|\mu_{ca}^n\| \to 0 \text{ and } \|\mu_{pfa}^n\| \to 1.$$

Moreover, the convergence is uniform with respect to the initial measures $\mu^1 \in S_{ba}$ and exponentially fast.

It is desirable to find simple analogues of these conditions (H_1) and (H_2) in terms of the properties of the transition functions considered by the MC. We offer two such conditions.

$$(G_1) \begin{cases} \text{There is a finite set } D \subset X \text{ such that for all } x \in X : \\ P_{ca}(x, D) = P_{ca}(x, X) = q_1, \text{ which is equivalent to } P_{ca}(x, X \setminus D) = 0. \end{cases}$$

Theorem 3 *Let condition (G_1) be satisfied for some MC. Then 1) the condition (H_1) is satisfied, 2) the assertion of Theorem 1 is true.*

Consider one more condition (G_2) on the transition function of the MC. For an arbitrary $y \in X$ we denote the set $Q_y = \{x \in X : P_{ca}(x, \{y\}) > 0\}$.

$$(G_2) \qquad \text{For any } y \in X \text{ the set } Q_y \text{ is empty or finite.}$$

Theorem 4 *Let condition (G_2) be satisfied for some MC. Then 1) the condition (H_2) is satisfied, 2) the assertion of Theorem 2 is true.*

References

[1] S. Ramakrishnan, *Finitely Additive Markov Chains*, Trans. Amer. Math. Soc., **265**:1 (1981), 247–272.

[2] A.I. Zhdanok, *Finitely additive measures in the ergodic theory of Markov chains I*, Siberian Advances in Mathematics, **13**:1 (2003), 87–125; in Russian: A.I. Zhdanok, *Konechno-additivnyye mery v ergodicheskoy teorii tsepey Markova I*, Matematicheskiye trudy, **4**:2 (2001), 53–95.

[3] A.I. Zhdanok, *Finitely additive measures in the ergodic theory of Markov chains II*, Siberian Advances in Mathematics, **13**:2 (2003), 108–125; in Russian: A.I. Zhdanok, *Konechno-additivnyye mery v ergodicheskoy teorii tsepey Markova II*, Matematicheskiye trudy, **5**:1 (2002), 45–65.

[4] Zhdanok, A.I. *Cycles in Spaces of Finitely Additive Measures of General Markov Chains*, In: Recent Developments in Stochastic Methods and Applications. Springer Proceedings in Mathematics Statistics, Springer: New York, NY, USA, (2021), 131-143.

Growth optimal strategies in a large market

Mikhail Zhitlukhin
Steklov Mathematical Institute of RAS, Moscow

In this work, we consider a model of a financial market which consists of a large agent ("the market") and a small agent (an individual investor), who invest money in dividend paying stock. Stock prices are determined by the actions of the large agent, and the small agent is a price-taker. The goal of the work is to find a strategy of the large agent which does not allow a small agent to achieve long-term growth of wealth greater than that of the large agent. The motivation for studying this problem arises from the known empirical fact that it is not possible "to beat" the market in the long run. If one assumes that this fact is true, it can be used to describe long-term behavior of the market. A related model was considered by Kardaras [1], but his setting does not lead to a single optimal strategy.

Let $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathrm{P})$ be a filtered probability space satisfying the usual assumptions and the filtration having the property that any martingale has a continuous modification.

There are N assets in the market which pay dividends with intensities X_t^n per unit of time, $n = 1, \ldots, N$. The supply of each asset (the number of shares in circulation) is normalized to 1. The dividends are paid in some perishable good and must be consumed by the agents immediately; there is no possibility to store the good. The intensity processes X_t^n are non-negative càdlàg semimartingales satisfying some non-degeneracy conditions.

There are two agents in the market, "large" and "small", who have wealth processes W_t and w_t. They are interpreted as "the market agent" who holds the whole market wealth, and an individual investor who has infinitesimal wealth (a rigor interpretation can be given by considering a the model with the number of agents going to infinity).

The agents' investment strategies are identified with processes $\Lambda_t = (\Lambda_t^1, \ldots, \Lambda_t^N)$ and $\lambda_t = (\lambda_t^1, \ldots, \lambda_t^N)$ with values in the N-simplex $\Delta_N = \{x \in \mathbb{R}_+^N : x^1 + \ldots + x^N = 1\}$. These processes show in which proportions the agents divide their wealth for investment in the assets. Both agents have the same consumption rate $\rho > 0$.

The model assumes that the wealth dynamics is defined by the equations

$$W_t = \frac{1}{\rho} \sum_{n=1}^{N} X_t^n, \tag{1}$$

$$dw_t = \sum_{n=1}^{N} \frac{\lambda_t^n w_t}{S_t^n} (dS_t^n + X_t^n dt) - \rho w_t dt, \tag{2}$$

where S_t^n are the stock prices, which are defined by the relation

$$S_t^n = \Lambda_t^n W_t. \tag{3}$$

Equation (1) follows from that the dividends must be fully consumed and the total market wealth is held by the large agent. Consequently, the strategy of this agent determines the asset prices: we assume that the supply of each asset is 1, so the price is equal to the amount of money invested in the asset, which gives equation (3). Equation (2) is the standard self-financing condition.

Definition 1. We say that the small agent *does not beat the market* in the long run if

$$\limsup_{t\to\ 0} \frac{w_t}{W_t} < \infty \text{ a.s.}$$

A strategy of the large agent is called *market growth optimal* if it cannot be beaten by any strategy of the small agent.

The main result of the paper consists in construction of a market growth optimal strategy.

Theorem 1. *The strategy* $\widehat{\Lambda}_t = (\widehat{\Lambda}_t^1, \dots, \widehat{\Lambda}_t^N)$ *with the components*

$$\widehat{\Lambda}_t^n = e^{\rho t}\,\mathrm{E}\bigg(\int_t^\infty \rho e^{-\rho s} \frac{X_s^n}{\sum_{i=1}^n X_s^i} ds \;\bigg|\; \mathcal{F}_t\bigg)$$

is market growth optimal.

References

[1] Kardaras, C. (2008). Balance, growth and diversity of financial markets. *Annals of Finance*, 4(3), 369-397.

Программная реализация и статистическая оценка эквивалентности моделей классификации символов латинского алфавита на основе импульсной и свёрточной нейронной сети

Алымова Е.В.
Российская таможенная академия (Ростовский филиал), Ростов-на-Дону, Россия

Задача распознавания образов является одной из основных задач в области интеллектуального анализа данных. Нейронные сети, преимущественно свёрточные, эффективно распознают объекты на графических изображениях, в том числе, если они немного искажены [1].

Свёрточные нейронные сети (СНС) обладают архитектурой, позволяющей максимально эффективно распознавать образы. В СНС чередуются свёрточные (convolutional) и субдискретизирующие (pooling) слои, структура сети однонаправленная. Используется операция свертки, то есть умножение каждого фрагмента изображения на ядро свертки поэлементно с последующим суммированием результата и записью в похожую позицию выходного изображения. При этом обеспечивается инвариантность распознавания относительно сдвига объекта, что весьма существенно при наличии искажения или поворотов распознаваемых графических элементов.

В импульсных нейронных сетях (ИмНС) нейроны обмениваются короткими импульсами одинаковой амплитуды. В настоящее время эти сети наиболее реалистично моделируют активность мозга. ИмНС имеют ряд преимуществ в аппаратной реализации. Пучки импульсов, в каждом из которых содержится большое количество информации, разбросаны во времени, что дает возможность значительно снизить электропотребление. Аппаратная реализации такой сети будет более экономична, подстраивая свою работу под импульсную активность [2].

В работе рассматривается задача распознавания 62 символов латинского алфавита. В качестве исходных данных сформировано 62 набора графических изображений 26 букв латинского алфавита (в верхнем и нижнем регистре) и 10 арабских цифр. Каждый набор содержит 983 изображения размером 128x128 точек. Изображения составлены на основе глифов, извлеченных из файлов шрифтов.

Задача классификации символов латинского алфавита рассматривается в следующей постановке. Зафиксировано множество X графических изображений объектов и конечное множество Y меток целевых классов. На объектах конечной обучающей выборки $X^m = \{(x_1, y_1), \dots, (x_m, y_m)\}$ существует целевая зависимость $f^*: X \to Y$. Требуется построить алгоритм $\alpha: X \to Y$, относящий произвольный объект из X к некоторому классу из множества Y согласно установленной в процессе обучения зависимости. Составляются два варианта реализации алгоритма: классификаторы на основе импульсной и свёрточной нейронной сети.

СНС реализована на основе библиотеки Tensorflow, содержит 9 слоев и 97278 тренируемых параметров. В ходе практического эксперимента сеть в среднем распознает правильно 89 символов из 100, то есть имеет точность распознавания в среднем 89%.

Замечено, что в ряде случаев сеть относит к ошибочному классу схожие по начертанию символы. В работе выделены множества схожих символов, в рамках которых символ считается принадлежащим одному классу: {i, l, j, 1}, {g, 9}, {c, C}, {p, P}, {o, 0, O}.

С введенным объединением классов СНС в среднем распознает 93 символов из 100, то есть имеет точность распознавания в среднем 93%.

ИмНС реализована с помощью инструмента Nengo DL, позволяющего конвертировать исходную сверточную сеть в импульсную путем замены типа нейронов и функций активации. С введенным объединением классов ИмНС в среднем распознает 91 символов из 100, то есть имеет точность распознавания в среднем 91%.

Теорема. Модель классификации символов латинского алфавита на основе импульсной нейронной сети при значениях $\chi^2 = 2.4671$, $P_{value} = 0.07437$ теста Мак-Немара и 5% уровне значимости согласуется с моделью классификации, построенной на основе свёрточной нейронной сети.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1 K. Kranthi Kumar, M. Dileep Kumar, Ch. Samsonu, K. Vamshi Krishna. Role of convolutional neural networks for any real time image classification, recognition and analysis. // Materials Today: Proceedings. – 2021.

2 J. Victor, K. Purpura. Metric-space analysis of spike trains: Theory, algorithms and application. // Network: Computation in Neural Systems. – 1997. – v. 8. – pp. 127-164.

О локальных временах условных случайных блужданий

Афанасьев В.И.

Пусть $X_1, X_2, \ldots$ – независимые случайные величины с одинаковым арифметическим распределением с максимальным шагом 1, причем $\mathbf{E}X_1 = 0$, $\mathbf{E}X_1^2 := \sigma^2 \in (0, +\infty)$.

Рассмотрим случайное блуждание $S_0 = 0$, $S_i = \sum_{j=1}^{i} X_j$ при $i \in \mathbf{N}$. Пусть $\xi(k,n)$ означает число попаданий блуждания $\{S_n,\ n \geq 0\}$ в состояние $k \in \mathbf{Z}$ за моменты времени $1, \ldots, n$, т.е.

$$\xi(k,n) = |\{i \in \{1, \ldots, n\} : S_i = k\}|.$$

Пусть $\{W(t),\ t \geq 0\}$ – стандартное броуновское движение. Введем следующие два момента достижения состояния 0 броуновским движением W: один из них τ_0' предшествует моменту 1, а другой τ_0'' следует за этим моментом, т.е.

$$\tau_0' = \sup\{t \in [0,1] : W(t) = 0\},\ \tau_0'' = \inf\{t > 1 : W(t) = 0\}.$$

Положим $T_0^+ = \tau_0'' - \tau_0'$. *Броуновской экскурсией* называется случайный процесс, равный $W(\tau_0' + t)$ при $t \in \left[0, T_0^+\right]$ и равный 0 при $t \geq T_0^+$. Обозначим этот процесс $\{V(t), t \geq 0\}$. *Броуновская извилина* строится по броуновской экскурсии: при $t \geq 0$

$$W^+(t) = \frac{|V((1-\tau_0')\,t)|}{\sqrt{1-\tau_0'}}.$$

Пусть $l^+(u,t)$ – локальное время процесса $\{W^+(s),\ s \in [0,t]\}$ на уровне $u > 0$, т.е.

$$l^+(u,t) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t I_{[u,u+\varepsilon]}\left(W^+(s)\right) ds.$$

Пусть $T = \min\{i > 0 : S_i \leq 0\}$ и символ $\xrightarrow{D}$ означает сходимость по распределению в пространстве $D[0, +\infty)$ с топологией Скорохода.

Теорема 1. *При* $n \to \infty$

$$\left\{ \frac{\sigma\xi\left(\lfloor u\sigma\sqrt{n}\rfloor, n\right)}{\sqrt{n}},\ u \geq 0 \ \middle|\ T > n \right\} \xrightarrow{D} \left\{l^+(u,1),\ u \geq 0\right\}. \qquad (1)$$

При изучении различных моделей массового обслуживания, страхования и ветвящихся процессов особую роль играет *остановленное случайное блуждание* $\widetilde{S}_i = S_i$ при $i < T$ и $\widetilde{S}_i = 0$ при $i \geq T$.

Обозначим $\widetilde{\xi}(k)$ число попаданий блуждания $\left\{\widetilde{S}_i,\ i \ge 0\right\}$ в состояние $k \in \mathbf{N}$, т.е. $\widetilde{\xi}(k) = \left|\left\{i \ge 0 : \widetilde{S}_i = k\right\}\right|$. Величина $\widetilde{\xi}(k)$ называется *локальным временем* остановленного случайного блуждания на уровне k.

Теорема 2. *При* $n \to \infty$

$$\left\{ \frac{\sigma\widetilde{\xi}\left(\lfloor u\sigma\sqrt{n}\rfloor\right)}{\sqrt{n}},\ u \ge 0 \;\middle|\; T > n \right\} \xrightarrow{D} \left\{l^{+}(u, +\infty),\ u \ge 0\right\}.$$

Снова рассмотрим стандартное броуновское движение $\{W(t),\ t \ge 0\}$. Пусть τ_x – момент первого достижения состояния x броуновским движением W, т.е. $\tau_x = \inf\{t > 0 : W(t) = x\}$. Введем следующие два момента достижения состояния 0 броуновским движением W. Один из них $\tau_0^{(1)}$ предшествует моменту τ_1, а другой $\tau_0^{(2)}$ следует за этим моментом:

$$\tau_0^{(1)} = \sup\{t \in [0, \tau_1] : W(t) = 0\},\ \tau_0^{(2)} = \inf\{t > \tau_1 : W(t) = 0\}.$$

Положим $T_0^{\uparrow} = \tau_0^{(2)} - \tau_0^{(1)}$. *Броуновским прыжком в высоту* называется случайный процесс, равный $W\left(\tau_0^{(1)} + t\right)$ при $t \in \left[0, T_0^{\uparrow}\right]$ и равный 0 при $t \ge T_0^{\uparrow}$. Обозначим этот процесс $\left\{W_0^{\uparrow}(t),\ t \ge 0\right\}$ и обозначим $l_0^{\uparrow}(u)$ его локальное время на уровне $u \in (0, +\infty)$, т.е.

$$l_0^{\uparrow}(u) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \int_0^{+\infty} I_{[u, u+\varepsilon]}\left(W_0^{\uparrow}(s)\right) ds.$$

Положим $T_x = \min\left\{i \in \mathbf{N} : \widetilde{S}_i > x\right\}$ при $x > 0$.

Теорема 3. *При* $n \to \infty$

$$\left\{ \frac{\sigma^2\widetilde{\xi}\left(\lfloor un\rfloor\right)}{n},\ u \ge 0 \;\middle|\; T_n < +\infty \right\} \xrightarrow{D} \left\{l_0^{\uparrow}(u),\ u \ge 0\right\}.$$

Оптимизация системы массового обслуживания с перерывами на основе стоимостного критерия

Афанасьев Г.А.

Россия, Москва. Ярославское ш., д. 26, e-mail: AfanasievGA@mgsu.ru

Рассматриваются одноканальные системы массового обслуживания, в которых прибор в моменты освобождения системы от требований на некоторые промежутки времени становится недоступным для обслуживания требований. Эти промежутки назовем перерывами (в англоязычной литературе – “vacations”). Изучение таких систем началось давно (см., например [1]), но в последние годы интерес к ним существенно возрос. Ссылки на наиболее важные результаты можно найти в статье [2]. Перерыв в обслуживании может быть следствием многих факторов. Например, владелец прибора не желает его длительных простоев и когда нет запросов на обслуживание с некоторой вероятностью сдает его в аренду на время η. Это приносит доход C_1, который возможно зависит от η или функции распределения η, если η – случайная величина. С другой стороны, сдача прибора в аренду может привести к увеличению числа ожидающих требований, что связано с определенными убытками. Считаем, что за пребывание в системе одного требования в единицу времени владелец выплачивает сумму C_2. Наша задача – найти значение вероятности сдачи прибора в аренду α и длительность перерыва η, которые максимизируют среднюю прибыль.

Сделаем следующие предположения. Входящий поток требований в систему вне перерывов X – пуассоновский процесс интенсивности λ, время обслуживания имеет произвольное распределение со средним b и вторым моментом $b_2 < \infty$, так что вне перерывов в символике Кендалла мы имеем систему M|G|1|∞. В моменты, когда система освобождается от обслуживания требований, прибор с вероятностью α уходит на перерыв (сдается в аренду), а с вероятностью $1-\alpha$ ждет поступления нового требования потока X.

Если после окончания перерыва в системе нет требований, то с вероятностью α начинается новый перерыв, а с вероятностью $1-\alpha$ при следующем скачке процесса X начинается обслуживание требования.

Число требований в системе в течение перерыва определяется процессом Y, который вообще говоря, отличается от X и $Y(t)$ – число требований через время t после начала перерыва.

Считается заданными следующие характеристики системы

$$\rho = \lambda b, \ \ \bar{\eta} = E\eta, \ \ Y_1 = EY(\eta), \ \ Y_2 = EY^2(\eta),$$
$$\delta = \int_0^\infty EY(t)1(\eta > t)dt\,, \gamma = 1 - \lambda\bar{\eta}(1-\rho) - \rho Y_1. \tag{1}$$

Средний доход $W(\alpha)$ в стационарном режиме определяется равенством

$$W(\alpha) = \frac{\alpha(C_1\lambda(1-\rho) - C_2 D_1) - C_2\bar{q}_0}{1-\alpha\gamma},$$

где

$$D_1 = \lambda(1-\rho)\delta + \frac{\rho(Y_2 - Y_1)}{2} - (1-Y_1)\overline{q_0}, \ \ \overline{q_0} = \rho + \frac{\lambda^2 b_2}{2(1-\rho)}. \tag{2}$$

Сначала, считая распределение η заданным, найдем α_0, доставляющее максимум функции $W(\alpha)$.

<u>Теорема 1.</u> Пусть $\rho = \lambda b < 1$, $b_2 < \infty, Y_2 < \infty$.

Если

$$C_1(x) > \frac{C_2(\gamma\bar{q}_0 + D_1)}{\lambda(1-\rho)}, \tag{3}$$

где $\gamma, \bar{q}_0, D_1$ определены в (1) и (2), то перерыв (сдачу в аренду) следует осуществлять с вероятностью единица, т.е. $\alpha_0 = 1$.

В противном случае перерывы не допускаются, т.е. $\alpha_0 = 0$.

Доказательство опирается на результаты статьи [2].

Далее предположим, что Y – пуассоновский процесс с интенсивностью λ, а продолжительность перерыва неслучайна и равна *x*. Доход от сдачи прибора в аренду на время *x* составляет сумму $C_1(x)$. Тогда в соответствии с (1) и (2) условие (3) принимает вид

$$C_1(x) > \frac{\lambda C_2}{2(1-\rho)} x^2\,. \tag{4}$$

Положим

$$\Lambda = \{x > 0 \colon \text{выполнено } (4)\}.$$

После несложных выкладок из теоремы 1 получаем следующий результат.

Следствие 1 Если Λ – непустое множество , то перерыв любой продолжительности $x \in \Lambda$ надо осуществлять с вероятностью единица. Оптимальное значение x_0, максимизирующее средний доход в единицу времени, является точкой максимума функции

$$\varphi(x) = \frac{C_1(x)}{x}(1-\rho) - C_2\frac{\lambda x}{2}.$$

В качестве примера рассмотрим случай, когда доход от перерыва

$$C_1(x) = c_1 x - d1(x > 0), \tag{5}$$

где d – издержки, связанные с организацией перерыва (или аренды), 1(A) – индикатор события A.

Следствие 2. Пусть $C_1(x)$ определена равенством (5).

Если

$$c_1\sqrt{1-\rho} < \sqrt{2d\lambda C_2}, \tag{6}$$

то перерыв следует делать с вероятностью единица и его оптимальная продолжительность

$$x_0 = \sqrt{\frac{2d(1-\rho)}{\lambda C_2}}.$$

Если (6) не выполняется, то перерыв делать не следует.

Рассмотрен также случай квадратичной зависимости $C_1(x)$ от x.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 20-01-00487.

Литература

1. Y. Levy, N Yechiali, Utilization of idle time in an M|G|1 queueing system. Msnegement Sci., 22:2, 1975, 202-211

2. Г.А. Афанасьев, Система M|G|1 с перерывами в работе прибора и их задержками, Теория вероятностей и ее приложения, 2021, 66, № 1, pp. 3-19.

Асимптотический анализ систем с повторными вызовами при регенерирующем входящем потоке

Афанасьева Л.Г., Баштова Е.Е.

Мы рассматриваем m-канальную систему с повторными вызовами. А именно, в системе имеется m идентичных приборов. Времена обслуживания на каждом приборе - независимые одинаково распределенные случайные величины (н.о.р.с.в.) с функцией распределения $B(x)$. Если в момент поступления требования есть хотя бы один свободный прибор, то требование немедленно начинает обслуживаться. Если же все приборы заняты, то оно отправляется на так называемую орбиту, откуда повторяет попытки попасть на обслуживание.

Мы изучаем процесс $Q(t)$ - число требований в системе (на орбите и на приборах вместе).

Предполагаем, что входящий поток $X(\cdot)$ является регенерирующим. Введем дополнительное условие на входящий поток и времена обслуживания.

Условие 1.

$$\mathsf{P}(\xi_1 = 0, \tau_1 > 0) + \mathsf{P}(\xi_1 = 1, \tau_1 - t_1 > \eta_1) > 0.$$

Здесь $\xi_j = X(\theta_j) - X(\theta_{j-1})$ - количество требований, пришедших за период регенерации.

Мы рассматриваем две модели, различающиеся правилами формирования повторных вызовов с орбиты.

Для модели M_1 вызовы с орбиты поступают тем чаще, чем больше на орбите требований. А именно, когда на орбите находится j требований, то запросы с нее поступают в соответствии с пуассоновским потоком интенсивности $\nu(j)$. В работе [1] доказана теорема об условиях стабильности модели M_1. Сформулируем теперь теорему об асимптотическом поведении количества требований в перегруженной системе.

Теорема 1. *Пусть* $\rho_I = \lambda b/m > 1$, $\mathsf{E}\tau_i^r < \infty$, $\mathsf{E}\xi_i^r < \infty$, $\mathsf{E}\eta_i^r < \infty$, *для некоторого* $r > 2$ *и*

$$j^{-1+1/r}\nu(j) \to \infty, \quad as\ j \to \infty.$$

Тогда существует стандартный Винеровский процесс W *такой что*

$$\sup_{0 \le u \le t} \|Q(u) - (\rho_I - 1)u - \sigma_I W(u)\| = o(t^{1/r}),\ \text{п.н.},$$

where $\sigma_I^2 = \sigma_X^2 + m\sigma_S^2$.

В модели M_2 запросы с орбиты поступают через н.о.р. интервалы. Если в момент запроса есть свободный прибор, а на орбите есть требования, то одно из них отправляется на обслуживание.

Пусть $\{\zeta_n\}_{n=1}^{\infty}$ - последовательность н.о.р.с.в., представляющих собой интервалы между запросами с орбиты, $N(t)$ - процесс восстановления, построенный по последовательности $\{\zeta_n\}_{n=1}^{\infty}$, его интенсивность $\nu = \lim_{t\to\infty} N(t)/t$.

Условие 2. Случайные величины ζ_n, $n \in \mathrm{N}$ имеют экспоненциальную фазу, т.е.

$$\zeta_n = \zeta_n^{(1)} + \zeta_n^{(exp)},$$

$\zeta_n^{(1)}$ и $\zeta_n^{(exp)}$ независимы, и $\zeta_n^{(exp)}$ имеют экспоненциальное распределение.

Для формулировки результатов необходимо ввести вспомогательную систему M_0 с m приборами, входящим потоком $U(t) = X(t) + N(t)$ и **отказами**.

Обозначим $n(t)$ - число занятых приборов в M_0, а t_k - k-ый момент поступления требования в M_0. В статье [1] показано, что при выполнении условий 1 и 2 существуют

$$\lim_{k\to\infty} \mathsf{P}(n(t_k) = j) = \mathsf{P}_j, \quad j = \overline{1, m},$$

коэффициент загрузки системы равен

$$\rho_c = \frac{\lambda}{(\lambda + \nu)(1 - P_m)}$$

и доказана эргодическая теорема. Основной результат доклада, касающийся системы M_2 – сильная гауссовская аппроксимация длины очереди в ситуации, когда система перегружена.

Теорема 2. *Пусть $\rho_c > 1$, выполнено условие 2 и $\mathsf{E}\tau_i^r < \infty$, $\mathsf{E}\xi_i^r < \infty$, $\mathsf{E}\eta_i^r < \infty$ $\mathsf{E}\zeta_i^r < \infty$, для некоторого $r > 2$. Тогда существуют константа $\sigma_c^2 > 0$ и стандартный Винеровский процесс W так что*

$$\sup_{0\le u\le t} \|Q(u) - (\rho_c - 1)u - \sigma_c W(u)\| = o(t^{1/r}),\ a.s.,$$

при $t \to \infty$.

Основная идея доказательств теорем 1 и 2 состоит в построении мажорирующих систем, в частности, системы без орбиты и с общей очередью и системы с отказами и сложно устроенным входящим потоком. Затем используются результаты работы [3] о сильной гауссовской аппроксимации регенерирующих потоков.

Работа поддержана грантом РФФИ 20-01-00487.

Литература

1. Л. Г. Афанасьева, “Условия стабильности системы с повторными вызовами при регенерирующем входящем потоке”, Фундамент. и прикл. матем., 22:3 (2018), 5–18
2. Afanasyeva, L.G., Bashtova, E.E.: Coupling method for asymptotic analysis of queues with regenerative input and unreliable server. Queueing Systems. V. 76, pp. 125–147 (2014)
3. E. Bashtova, A. Shashkin, Strong Gaussian approximation for cumulative processes, Stochastic Processes and their Applications, 2022, ISSN 0304-4149, https://doi.org/10.1016/j.spa.2022.04.003.
4. Zhang Hanqin, Hsu Guanghui and Wang RongxinStrong Approximations for Multiple Channel Queues in Heavy Traffic Author(s): Source: Journal of Applied Probability, Vol. 27, No. 3 (Sep., 1990), pp. 658-670

О сильной аппроксимации некоторых типов случайных полетов

Баштова Е.Е.

Пусть $\varepsilon = \{\varepsilon_n, n \geq 0\}$ — независимые одинаково распределенные случайные векторы, принимающие значения на единичной сфере в $\mathbb{R}^k$, а $\{T_n, n \geq 0\}$ — возрастающая последовательность случайных величин, не зависящая от ε ($T_0 = 0$). Случайным полетом называется непрерывный случайный процесс $X = \{X(t), t \geq 0\}$, траектория которого на участке $[T_{n-1}, T_n]$ ($n \geq 1$) линейна и ее направление задается реализацией случайного вектора ε_n. Такие процессы рассматривали еще Пирсон, Рэлей и Мандельброт, который ввел определение случайного полета Леви. В докладе устанавливается сильная гауссовская аппроксимация для двух классов случайных полетов. Для одного из них аппроксимирующий процесс получается Винеровским, и получена скорость сходимости, оптимальная в смысле Комлоша-Майора-Тушнади. Для другого класса, который строится по точечному Пуассоновскому процессу, аппроксимирующий процесс уже не Винеровский, однако на основе результатов из [4] удается оценить точность аппроксимации. Стоит отметить, что представленная теорема 2 является усилением части результатов, полученных в [3] и [5].

Переходя к формулировкам, напомним следующее определение ([1]).

Определение 1. Процесс $\{S(t), t \geq 0\}$, принимающий значения в $\mathbf{R}^d$, с покоординатно неубывающими, непрерывными справа и имеющими предел слева траекториями называется регенерирующим потоком, если существует возрастающая последовательность $\{\theta_i, i \geq 0\}$, $\theta_0 = 0$ такая, что последовательность

$$\{\kappa_j\}_{j=1}^{\infty} = \{S(\theta_{j-1} + t) - S(\theta_{j-1}), \theta_j - \theta_{j-1}, t \in [0, \theta_j - \theta_{j-1})\}_{j=1}^{\infty}$$

состоит из н.о.р. случайных элементов. Тогда последовательность $\{\tau_i = \theta_i - \theta_{i-1}\}_{i=1}^{\infty}$ называется последовательностью периодов регенерации.

Пусть $N(t) = \min\{n \geq 0 : T_n > t\}, t \geq 0$. Мы предполагаем, что $\mathsf{E}\varepsilon_1 = 0$, $\mathsf{Var}\varepsilon_1 = \sigma_\varepsilon^2$.

Теорема 1. *Пусть $N(t)$ является регенерирующим потоком.*

1) *Если $\mathsf{E}e^{p\tau_i} < \infty$, для некоторого $p > 0$, то на одном вероятностном пространстве можно задать процесс X и d-мерный винеровский процесс $\{W_t, t \geq 0\}$ так что для всех $t \geq 1$, $x > 0$ и некоторых констант $a, b, c > 0$ выполняется*

$$\mathsf{P}\Big(\sup_{u \leq t}\big|X(u) - \sigma_\varepsilon\sqrt{\mathsf{E}\tau_1}W(u)\big| > a\log t + x\Big) \leq be^{-cx}.$$

2) Если $\mathsf{E}\tau_i^p < \infty$, *для некоторого* $p > 2$, *то на одном вероятностном пространстве можно задать процесс* X *и* d*-мерный винеровский процесс* $\{W_t, t \geq 0\}$ *так что для всех* $t \geq 1$, $x > 0$ *и некоторой константы* $a > 0$ *выполняется*

$$\mathsf{P}\big(\sup_{u \leq t}\big|X(u) - \sigma_\varepsilon\sqrt{\mathsf{E}\tau_1}W(u)\big| > x\big) \leq atx^{-p}.$$

Теорема 2. *Пусть* $N(t) = \Pi(t^{1/\alpha})$, *где* Π *- стандартный пуассоновский процесс и* $\alpha > 1/2$. *На одном вероятностном пространстве можно задать процесс* X *и* d*-мерный винеровский процесс* $\{W_t, t \geq 0\}$ *так что для всех* $t \geq 1$, $x > 0$ *и некоторой константы* $C > 0$ *выполняется*

$$\mathsf{P}\left(\sup_{u \leq t}\left|X(u) - \alpha\sqrt{\frac{2}{2\alpha - 1}}W\left(u^{\frac{2\alpha-1}{\alpha}}\right)\right| > x\right) \leq Ct^{\gamma - \frac{\gamma-1}{\alpha}}x^{-\gamma}.$$

Здесь, если $\alpha \geq 1$, *то* $\gamma > 2$, *а если* $1/2 < \alpha < 1$, *то* $2 < \gamma < \frac{1}{1-\alpha}$.

Работа поддержана грантом РФФИ 20-01-00487.

Литература

1. Afanasyeva, L.G., Bashtova, E.E.: Coupling method for asymptotic analysis of queues with regenerative input and unreliable server. Queueing Systems. V. 76, pp. 125–147 (2014)
2. Bashtova E., Shashkin A., Strong Gaussian approximation for cumulative processes, *Stochastic Processes and their Applications*, 2022, ISSN 0304-4149, https://doi.org/10.1016/j.spa.2022.04.003.
3. Davydov, Y., Konakov, V. Random Walks in Nonhomogeneous Poisson Environment. (2017) In: Panov, V. (eds) Modern Problems of Stochastic Analysis and Statistics. MPSAS 2016. Springer Proceedings in Mathematics and Statistics, vol 208. Springer, Cham. `https:// doi.org/10.1007/978-3-319-65313-6_1`
4. Зайцев А. Ю., “Точность сильной гауссовской аппроксимации для сумм независимых случайных векторов”, УМН, 68:4(412) (2013), 129–172;
5. Конаков В. Д., Фалалеев А. Р., “Сходимость некоторых классов случайных полетов в метрике Канторовича”, Теория вероятн. и ее примен., 65:4 (2020), 829–840;

Игровая модель управления портфелем инвестиций.

Белявский Г. И., Данилова Н. В., Угольницкий Г. А.
(Южный Федеральный университет, г. Ростов-на-Дону)

В докладе задача об оптимальном портфеле рассматривается как игра между двумя игроками, один из которых занимается инвестициями (паевой инвестиционный фонд - ПИФ), другой выделяет на это средства (агент). Основная цель данного подхода – получить условия устойчивого развития изучаемой системы из двух игроков за счет формирования портфеля инвестиций. Для достижения этой цели находится решение игры и изучается задача машинного обучения, с помощью которого реализуется данное решение.

В докладе анализируется литература, связанная с использованием алгоритмов обучения с учителем в реальном времени при формировании портфеля инвестиций, и делается вывод, что данный метод является новым и позволяет получить обоснованные постановки задач обучения для каждого из игроков.

В простом варианте игры имеется один агент, располагающий некоторым резервным капиталом a. Агент делит свой капитал между инвестициями в ПИФ и иными вложениями (например, депозитными вкладами). Получив инвестиции от агента в размере x, ПИФ вкладывает эти средства в ценные бумаги по цене S_0^i, $i=1,2,\ldots,l$, а именно, $x=\sum_{i=1}^{l} y_i S_0^i$. Получив средства от продажи ценных бумаг по цене $S_1^i = r_i S_o^i$, а именно, $X=\sum_{i=1}^{l} y_i r_i S_0^i$, ПИФ возвращает часть из них αX , и часть $(1-\alpha)X$ оставляет себе, $0 \le \alpha \le 1$. Доходность портфеля $Q=\sum_{i=1}^{l} z_i r_i$ является случайной величиной. Доходность агента $K=\alpha Q$. Оптимальная стратегия агента: $x^*=aI_A$, $A=\{\omega: K \ge g\}$. Проблема агента заключается в том, что ему неизвестно значение индикатора. Информация, доступная агенту в момент t – это последовательность $K_1, K_2, \ldots, K_t$, используя которую агент может либо вычислить оценку индикатора, либо вычислить оценку математического ожидания $EI_A=P(A)$, либо оценку среднего EK . Каждую из этих оценок агент вычисляет, применяя обучение в реальном времени. Для каждого из этих регламентов агент выбирает оптимальную стратегию.

Утверждение 1. Для первого информационного регламента оптимальная стратегия агента: $x^*=a\overline{I}_A$. Для второго регламента оптимальная стратегия – смешанная стратегия x^* : $P(x^*=a)=\overline{P}(A), P(x^*=0)=1-\overline{P}(A)$. Для третьего регламента оптимальная стратегия $x^*=\begin{cases} a, \overline{EK} \ge g \\ 0, \overline{EK} < g \end{cases}$.

ПИФ заинтересован в поступлении инвестиций, он стремится добиться этого, выбирая портфель Z и α , поэтому для ПИФа рассматриваются две возможные задачи выбора оптимального решения. Первая задача заключается в максимизации по Z вероятности $P\big((R\ ,Z) \geq g/\alpha\big)$ при ограничениях $(I,Z) = 1,(ER,Z) \geq g/\alpha$ и фиксированном α . Первое ограничение непосредственно вытекает из определения доходности портфеля, второе ограничение связано с возможностью использования агентом третьей стратегии. Вторая задача заключается в максимизации по Z порога θ при ограничениях $P\big((Z,R) \geq \theta\big) \geq \beta,(I,Z) = 1,(ER,Z) \geq \theta,\ \theta \geq g$ и фиксированном β. Проблема ПИФа заключается в том, что закон распределения либо известен с точностью до параметров, либо неизвестен совсем. Информация, известная агенту в момент времени t — это последовательность $R_1, R_2, \dots R_t$. В докладе предполагается, что условным законом распределения доходности относительно последовательности является нормальный закон распределения $N\left((\overline{R}_t, Z),(\overline{C}_t Z, Z)\right)$, $\overline{R}_t = \frac{1}{t}\sum_{i=1}^{t} R_i$, $\overline{C}_t = \frac{1}{t}\sum_{i=1}^{t} R_i R_i^T - \overline{R}\,\overline{R}^t$, или эмпирический закон распределения, порождаемый последовательностью: $P(R \in A) = \frac{1}{t}\sum_{i=1}^{t} I_{\{R_i \in A\}}$. Для первого варианта, относительно наблюдаемой последовательности, задача максимизации вероятности преобразуется в задачу: $max\frac{(Z,\bar{R}_t)-g/\alpha}{\sqrt{(\bar{C}_t Z,Z)}}$ при ограничениях: $(I,Z) = 1,(Z,\bar{R}_t) \geq g/\alpha$. Предполагается, что матрица $\overline{C}_t$ симметричная и положительно определенная. Доказываются следующие утверждения.

Утверждение 2. Если $\bar{R} \neq \mu I$, то задача сводится к одной из двух задач одномерной оптимизации $max\frac{\bar{a}+\bar{B}}{\sqrt{\bar{a}^2+\bar{H}}}$, при ограничении $\bar{a} + \bar{B}\ \geq 0$; или $max\frac{-\bar{a}+\tilde{B}}{\sqrt{\bar{a}^2+\tilde{H}}}$ при ограничении $-\bar{a} + \tilde{B} \geq 0$. Следующее утверждение касается существования решения задачи о максимуме вероятности.

Утверждение 3. Если $\bar{R} \neq \mu I$, то задача максимизации вероятности имеет решение тогда и только тогда, когда либо $\bar{B} > 0$, либо $\tilde{B} > 0$.

Если задача не имеет решения, то критерию следует добавить слагаемое, налагающее штраф за рост нормы вектора Z. Таким образом, первую задачу ПИФа лучше сформулировать следующим образом: $max\left(\frac{(Z,\bar{R}_t)-\theta}{\sqrt{(\bar{C}_t Z,Z)}} - \delta(Z,Z)\right)$ при ограничениях: $(I,Z) = 1,(Z,\bar{R}_t) \geq \theta,\ \delta > 0$. Легко показывается, что данная задача всегда имеет решение.

Если $\overline{R} = \mu I, \mu \geq g/\alpha$, то оптимальное решение $Z^* = \frac{1}{\left((\overline{C})^{-1}I,I\right)}\left(\overline{C}\right)^{-1} I$.

В первом информационном регламенте вторая задача ПИФа будет иметь вид: $max\left[(Z,\bar{R}) - \gamma\sqrt{(\bar{C}Z,Z)}\right]$, при ограничениях $(Z,I) = 1,\ (Z,\bar{R}) - \gamma\sqrt{(\bar{C}Z,Z)} \geq g$. Множитель γ

однозначно определяется из равенства: $\Phi(\gamma) = \beta, \beta \geq 0.5$, Φ - функция Лапласа. Ограничение $(Z, \bar{R}_t) \geq \theta$ выполняется при $\beta \geq 0.5$. Целевая функция данной задачи является вогнутой, так как $\gamma \geq 0$. Рассмотрим задачу без второго ограничения и Z^* - решение этой задачи. Справедливо утверждение.

Утверждение 4. Вторая задача ПИФа имеет решение тогда и только тогда, когда $(Z^*, \bar{R}) - \gamma\sqrt{(\bar{C}Z^*, Z^*)} \geq g$.

Рассмотрим применение ПИФом эмпирического закона распределения, порождаемого последовательностью $R_1, R_2, \dots R_t$. Для эмпирической функции распределения вероятность $P\big((Z, R) \geq \theta\big) = 1 - \frac{Mis}{t}$, $Mis = \sum_{i=1}^{t} I_{\{(Z,R_i)<\theta\}}$, поэтому задача ПИФа заключается в следующем: требуется найти $min\, Mis$ при ограничениях: $(Z, I) = 1, (Z, \bar{R}) \geq g/\alpha$. К сожалению, функции $I_{\{(Z,R_i)<\theta\}}$ не являются выпуклыми, поэтому воспользуемся выпуклой оценкой сверху данных функций: $I_{\{(Z,R_i)<\theta\}} \leq max\{\theta + 1 - (Z, R_i), 0\}$ и рассмотрим выпуклую задачу $min \sum_{i=1}^{t} max\{\theta + 1 - (Z, R_i), 0\}$ при ограничениях: $(Z, I) = 1, (Z, \bar{R}) \geq \theta$. Данную задачу будем рассматривать как первую задачу ПИФа, которую можно решать как задачу обучения с учителем в реальном времени.

Для второй задачи ПИФа воспользуемся предыдущим неравенством, из которого следует, что решение задачи $\max\theta$ при ограничениях: $\frac{1}{t}\sum_{i=1}^{t} max\{\theta + 1 - (Z, R_i), 0\} \leq 1 - \beta, (Z, I) = 1, \big(Z, \overline{R}\big) \geq \theta, \theta \geq g$, является оценкой снизу для решения второй задачи ПИФа.

Как уже отмечалось, задача агента – это задача прогноза, для решения которой естественно использовать обучение с учителем в реальном времени.

Например, прогноз вероятности случайного события, которую агент применяет в своем смешанном решении, может выглядеть следующим образом. Допустим прогноз выражается равенством: $P_{t+1}(A) = \varphi\big((a, \delta_{t-m}^{t})\big)$, φ – функция активации со значениями в интервале $[0,1]$, a – параметр, подлежащий определению в результате обучения, $\delta_i = I_{\{K_i \geq g/\alpha\}}$, $\delta_{t-m}^{t} = \delta_{t-m}, \delta_{t-m+1}, \dots, \delta_t$, $(.,.)$ – скалярное произведение. Качество оценки - $\psi_{t+1}(a)$ определяется после измерения δ_{t+1} следующим образом: $\psi_{t+1}(a) = \delta_{t+1} ln \frac{\varphi\left((a, \delta_{t-m}^{t})\right)}{1 - \varphi\left((a, \delta_{t-m}^{t})\right)} - ln\Big(1 - \varphi\big((a, \delta_{t-m}^{t})\big)\Big)$. Для вычисления следующего приближения можно применять различные алгоритмы обучения в реальном времени. Например, уравнение $a_{t+1} = argmin[\|a_t - a\|^2 - h_t\psi_t(a)]$ получается в результате применения алгоритма зеркального спуска.

В завершении доклада приводятся и комментируются результаты вычислений на реальных данных; приводится и комментируется список литературы.

Алгоритм численного моделирования электронной плотности стохастически конвектирующей высокоширотной ионосферы

G.A. Vlaskov, A.M. Mozhaev

Don State Technical University, Rostov-on-Don, Russia

Для расчета объемного распределения ионосферной плазмы в верхней полярной ионосфере необходимо рассмотреть систему уравнений неразрывности вида

$$\frac{\partial N_e}{\partial t} + (\vec{V}\nabla)N_e + \nabla(N_e \vec{V}_{\|}) = q_i - L_i - N_e \nabla \vec{V} \qquad (1)$$

$(i = 1,2,3,.......)$

где N_i – плотность ионов i-го сорта;

$\vec{V}$ - скорость поперечного по отношению к магнитному полю переноса плазмы, задаваемая моделью конвекции;

$\vec{V}_{\|}$ - продольная скорость движения ионов;

q_i – скорость образования ионов i-сорта;

L_i – скорость их рекомбинации.

Все входящие в уравнение (1) переменные являются в общем случае функциями времени и пространства. На высотах главного максимума $N_e (\approx 300\,км)$ в случае не очень сильных электрических полей (E<50 mV/м) преобладает ион 0^+ . Пренебрегая на рассматриваемой высоте продольными движениями электронов $\vec{V}$ и обжатием плазмы, получим:

$$\frac{\partial N_e}{\partial t} + \vec{V}\nabla N_e = q - \beta N_e \qquad (2)$$

где q –функция скорости ионообразования, β – линейный коэффициент рекомбинации.

Это уравнение представляет собой линейное уравнение первого порядка в частных производных, записанное в пространственных координатах (θ,λ) на сфере радиусом R_i . При заданных функциях $\vec{V}$, q, коэффициенте рекомбинации β оно позволяет получить горизонтальное распределение электронной плотности N_e. Начальным условием задачи предполагается некоторая известная функция:

$$N_e(\theta,\lambda,t)/_{t=t_0} = N_0(\theta,\lambda) \qquad (3)$$

Чтобы решить задачу, удобно воспользоваться лагранжевым подходом, который наряду с обычным (эйлеровым) применяется для описания движения сплошной среды и принят для описания физических процессов в F-области ионосферы.

Источники и механизмы появления нерегулярных магнитных полей в магнитосфере связывают с возмущением в солнечном ветре и магнитосферными суббурями, с развитием разнообразных плазменных неустойчивостей, приводящих к нерегулярной поляризации авроральной плазмы, с появлением полей поляризации в магнитосфере за счет появления нерегулярной ионизации высыпающимися электронами и т. д. Предполагаем, что такие поля существуют и порождают случайное поле скоростей конвекции.

Естественно полагать, что скорость конвекции равна:

$$\vec{V} + \overrightarrow{V_{st}} \qquad (4)$$

гдеV – скорость регулярного дрейфа,

$\overrightarrow{V_{st}}$ – случайная функция, описывающая скорость стохастического движения плазмы.

Пусть $\langle\overrightarrow{V_{st}}\rangle = 0$ (здесь и всюду угловые скобки обозначают математическое ожидание).

$$div\,\overrightarrow{V_{st}} = 0$$

Для построения модели конвекции, учитывающей флуктуации электрического поля используется датчик случайных чисел. Нерегулярное магнитное поле моделируется с помощью датчика случайных независимых равномерно распределенных чисел. В авроральной области $\theta_1 < \theta < \theta_2$ наблюдаются флуктуации конвекции с амплитудой, равной 25 мV/м и 5 мV/м в полярной шапке $\langle\theta < \theta_1\rangle$.

Рассмотрим подробнее случайную составляющую конвекции. Будем полагать, что стохастический перенос является стационарной однородной и изотропной случайной функцией. В случае, когда выполняются условия:

$T \gg \tau$ и $\langle \xi^2(\tau) \rangle \ll l^2$ (5)

где τ – время корреляции случайного переноса $\overrightarrow{V_{st}}$,

l – пространственный радиус корреляции случайного поля $\overrightarrow{V_{st}}$,

$\langle \xi^2(\tau) \rangle$ – средний квадрат стохастического смещения частиц (магнитных силовых трубок) за время τ,

T – характерное время изменения параметров задачи.

Таким образом случайные смещения могут быть описаны стохастическим дифференциалом вида

$d\xi = Vdt + \sigma d\omega(t)$ (6)

где $\delta d\omega(t)$ – смещение, обусловленное стохастическим переносом,

σ – параметр, характеризующий интенсивность флуктуационного движения,

$\omega(t)$ – винеровский процесс.

Данная формула описывает горизонтальный диффузионный перенос совокупности частиц, и $\sigma^2/2$ является при этом коэффициентом диффузии и имеет соответственно размерность M^2/c. Величина этого коэффициента в таких физических процессах, как правило, может быть получена только экспериментальным путем. Произведем приблизительную оценку параметров. Средний квадрат смещения $\langle \xi^2 \rangle$ растет со временем для винеровского процесса по формуле $\langle \xi^2 \rangle = \sigma^2 t$. Заменим непрерывный винеровский процесс соответствующим дискретным марковским процессом случайных блужданий, введя при этом эффективную среднюю длину L_0 и среднее время τ_0 свободного пробега частицы. Тогда получим выражение для среднего квадрата смещения за N случайных шагов в виде

$\langle \xi^2 \rangle_N = NL_0^2 = \sigma^2 N \tau_0$

Откуда $\sigma = \frac{L_0}{\sqrt{\tau_0}}$ (7)

Подставляя $\tau_0 = \frac{L_0}{\langle V_{st} \rangle}$ (8)

получим $\sigma = \sqrt{\langle V_{st} \rangle * L_0}$ (9)

Предположим, что флуктуации $\vec{E}$ в авроральной зоне достигают 25 mV/м, а в полярной шапке 5 mV/м. Это дает соответственно $\langle V_{st} \rangle$ = 500 м/с и 100 м/с. Полагая L_0 = 10 км, получим для авроральной зоны σ = 2500 м/с$^{1/2}$, а для полярной шапки 500 м/с$^{1/2}$. Принять такие значения для величин L_0 , $\langle V_{st} \rangle$ позволяет анализ экспериментальных данных о флуктуациях $\vec{E}$.

Будем считать, что стохастическое движение магнитных силовых трубок в плоскости (x, y) можно описать двумерным винеровским процессом в виде броуновских траекторий. Разобьем движение трубок на дискретные временные интервалы Δt. Тогда траекторию движущейся трубки можно заменить ломаной с координатами $\{x_i, y_i\}$, (i= 0,1,2…), вычисляемым по формулам:

$$\begin{aligned} X_{i+1} &= X_i + V_x(X_i, Y_i)\,\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t}\,\xi_i \\ Y_{i+1} &= Y_i + V_y(X_i, Y_i)\,\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t}\,\eta_i \end{aligned} \quad (10)$$

где V_x, V_y – компоненты скорости регулярной конвекции, ξ_i, η_i – независимые нормально распределенные случайные числа (математическое ожидание = 0, дисперсия = 1).

X_i, Y_i – координаты, принадлежащие отрезку $[(X_i, Y_i), (X_{i+1}, Y_{i+1})]$.

X_0, Y_0 – некоторое стартовое положение в начальный момент времени.

Строго говоря, σ является функцией координат и имеет тензорный характер в случае анизотропных флуктуаций поля скоростей. Здесь же для просто ты считаем σ изотропной и постоянной величиной. Данная формула определяется особенностями винеровского процесса.

Как было отмечено, учет стохастической компоненты магнитосферной конвекции предполагает, что магнитные силовые трубки переносящие плазму совершают беспорядочные движения. Очевидно, что при этом изменяется горизонтальное распределение электронной плотности в F-области полярной магнитосферы. В данном случае следует говорить об электронной плотности N_eкак случайном поле (стационарном или нестационарном).

Ставится задача оценить, используя такие представления, пространственные и временные флуктуации электронной плотности. Для этого используется уравнение неразрывности с учетом стохастического характера конвекции и представлении ее скорости в виде $\vec{V} + \overrightarrow{V_{st}}$. Только некоторые весьма сильные упрощения допускают аналитические решения [3].

Рассмотрим уравнение неразрывности в чуть более общем случае. Пусть $\vec{V}$ регулярного переноса – величина неоднородная в пространстве. Решение задачи при этом существенно усложняется. Аналитическое выражение для функции распределения или других вероятностных характеристик не удается найти. Поэтому наиболее действенными остаются численные методы, в частности, метод Монте-Карло, основанный на идее розыгрыша конкретных значений случайных факторов с использованием ЭВМ и датчика псевдослучайных чисел.

Рассмотрим величину $N_e(\vec{r})$ в некоторой точке $\vec{r}$ двумерной горизонтальной области ионосферы. Она зависит от того, что происходило с данной силовой трубкой в прошлом, то есть какое действие оказали процессы ионообразования и рекомбинации. Наличие стохастической компоненты переноса не позволяет однозначно определить, через какие зоны и какой интенсивности функции q проходила траектория этой магнитной силовой трубки. Существенно то, что при этом случайным образом меняется ее скорость и направление движения.

Рассмотрим возможность применения метода Монте-Карло для следующей задачи: необходимо выяснить распределение магнитной плотности в области x > 0, устанавливающееся под действием регулярной и стохастической конвекции. Предполагается, что при $x \le 0, N_e = n_0 = \text{const}$. Считается возможным пренебречь вертикальным движением плазмы и принять линейный закон рекомбинации с коэффициентом β. В этом случае уравнение неразрывности примет вид

$$\begin{cases} \frac{\Delta N_e}{\Delta t} + (V_x + V_{st}^x)\frac{\Delta N_e}{\Delta x} + \left(V_y + V_{st}^y\right)\frac{\Delta N_e}{\Delta y} + \beta N_e = 0 \\ N_e = n_0 \text{ при } x \le 0 \end{cases} \tag{11}$$

гдеV_x, V_y – проекции скорости регулярной,

V_{st}^x , V_{st}^y – стохастической конвекции на оси x и y.

Решение данного уравнения для (x > 0) имеет вид

$$N_e(X,Y)_t = n_0 \exp\left(-\beta t_{xy}\right) \tag{12}$$

где t_{xy} – время, затраченное на движение магнитной силовой трубки от стартового положения до точки с координатами *x, y*.

В различные моменты времени t в точку с этими координатами попадают различные частицы и на их движение затрачивается различное время t_{xy}. Из-за случайного характера движений частиц величины t_{xy} и плотности $N_e(X,Y)$ также является случайными.

Несложно вычислить математическое ожидание и дисперсию $N_e(X,Y)$ приближенно. Разыграв пучок возможных траекторий трубок, приходящих в заданную точку, можно оценить эти величины по формулам математической статистики:

$$\langle N_e \rangle = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} N_e^i(X,Y)$$
$$\Delta N_e^2 = \frac{1}{k-1}\sum_{i=1}^{k}\left[N_e^i(X,Y) - \langle N_e \rangle\right]^2 \tag{13}$$

гдеk – количество построенных траекторий,

i – номер конкретной реализации (траектории розыгрыша).

Особая ценность предложенного метода заключается в том, что он легко распространяется на более сложные случаи.

[1] Исаев Н В., Трушкина Е. П., Осипов Н. К. Эмпирические модели электрического поля в высокоширотной ионосфере, - Препринт № 51(936), 1990, Москва, ИЗМИРАН СССР, 40 с.

[2] М. Г. Дёминов, Ионосфера Земли: закономерности и механизмы, *Электромагнитные и плазменные процессы от недр Солнца до недр Земли*, ИЗМИРАН, М., 2015, 295–346.

[3] Yu. E. Gliklikh, G. A. Vlaskov On modelling the convecting polar ionosphere, *Journal of Computational and Engineering Mathematics*, 2019, vol. **6**, no. 1, p. 63-67.

[4] Власков Г.А., Можаев А.М. О моделировании стохастически конвектирующей полярной ионосферы. – в кн.: *Исследование высокоширотной ионосферы*, Апатиты, изд. Кольского филиала АН СССР, 1986, с. 42-45.

[5] Власков Г.А., Можаев А.М. Моделирование стохастически конвектирующей ионосферы (тез. докл. науч. конф.), *Теория вероятностей и ее применения*. - 2017. - Т. **62**, № 4. – С. 806-807

Об одном стохастическом уравнении с производными в среднем, связанном с гидродинамикой

Ю.Е. Гликлих

Предварительные сведения, в частности понятия производной в среднем слева D_* и симметрической производной (текущей скорости) D_S, а также описание групп соболевских H^s диффеоморфизмов плоского n-мерного тора, $s > \frac{n}{2} + 1$, имеются в [1].

На группе H^s диффеоморфизмов плоского n-мерного тора рассмотрим процесс $\xi(t)$, удовлетворяющий следующей системе стохастических дифференциальных уравнений с производными в среднем:

$$\begin{array}{l} D_* D_* \xi(t) = 0 \\ D_* \xi(t) = 2 D_S \xi(t) \end{array} \qquad (1)$$

Введем обозначение $D_*\xi(t) = u(t)_{\xi(t)}$ и правыми сдвигами на группе перенесем все $u(t)_{\xi(t)}$ в касательное пространство в единице e группы. При этом условное математической ожидание, входящее в определение производных в среднем, становится обычным математическим ожиданием. Так что в касательном пространстве в единице группы мы получаем детерминированную кривую $u_e(t)$.

Теорема 1 *$u_e(t)$ удовлетворяет уравнению Бюргерса и уравнению неразрывности.*

Список литературы

[1] Gliklikh Yu.E. Global and stochastic analysis with applications to mathematical physics. London: Springer-Verlag, 2011. 460 p.

О КОНСТРУКЦИИ ПЕРКИНСА В ЗАДАЧЕ ВЛОЖЕНИЯ СКОРОХОДА

А. А. Гущин[a] М. А. Недошивин[b]

[a] Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, Москва, Россия, e-mail: gushchin@mi-ras.ru
[b] МГУ им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия, e-mail: mishiv96@gmail.com

Задача вложения Скорохода состоит в том, что по заданному распределению μ на $\mathbb{R}$ требуется построить на некотором пространстве, на котором задано броуновское движение $B = (B_t)_{t\geqslant 0}$, момент остановки τ, для которого $\mathrm{Law}(B_\tau) = \mu$, и который обладает теми или иными желаемыми свойствами. В частности, Перкинс [1] в 1986 г. предложил конструкцию момента τ^*, для которого величина $\overline{B}_\tau$, где $\overline{B}_t := \sup_{s\leqslant t} B_s$ — текущий максимум процесса B, минимальна относительно стохастического порядка, т.е. $\mathsf{P}(\overline{B}_{\tau*} > \lambda) \leqslant \mathsf{P}(\overline{B}_\tau > \lambda)$ для всех $\lambda \geqslant 0$ и всех решений τ задачи вложения Скорохода. Перкинс предполагал, что распределение μ центрировано, общий случай (в том числе, когда μ не интегрируемо) был рассмотрен Коксом и Хобсоном [2].

В 1993 г. Роджерс [3] охарактеризовал класс Π всех возможных совместных распределений терминального значения п.н. сходящегося непрерывного локального мартингала, выходящего из 0, и его максимума. Эта характеризация позволяет разделить реализацию конструкции Перкинса на два шага. Обозначим π_1 и π_2 маргинальные распределения меры $\pi \in \Pi$. Первый шаг состоит в том, чтобы для любого одномерного распределения μ найти

$$\min_{\pi\in\Pi\colon\, \pi_1=\mu} \pi_2, \tag{1}$$

где минимум берется в смысле стохастического порядка. Если обозначить через π^* меру из Π, на которой достигается минимум, то второй шаг заключается в построении момента остановки τ^*, для которого $\mathrm{Law}(B_{\tau^*}, \overline{B}_{\tau^*}) = \pi^*$. Если первый шаг сделан, то результат Роджерса дает явный вид τ^*. Также было бы интересно получить явное выражение для τ^* из неявной конструкции для τ^* из работы [4] в сочетании с найденной в данной работе характеризацией оптимального распределения π^*, см. теорему ниже.

Итак, наша цель состоит в решении задачи (1). Следующие условия описывают класс Π совместных распределений терминального значения п.н. сходящегося непрерывного локального мартингала, выходящего из 0, и его максимума, см. [3], [4]:

$$\pi \in \Pi,$$

если

$$\pi((x,y)\colon y \geqslant 0,\ y \geqslant x) = 1,$$

$$\text{функция } \lambda \rightsquigarrow \lambda\pi(y > \lambda) + \int_{\{y\leqslant\lambda\}} x\,\pi(dx,dy) \text{ монотонно не убывает.}$$

Нам будет удобнее работать не с распределениями в $\mathbb{R}^2$, а с парами случайных величин (X, Y), которые предполагаются заданными на одном пространстве, которое может быть разным в разных местах. Предполагается, что задано распределение μ случайной величины X:

$$\mathrm{Law}(X) = \mu.$$

Исследование А. А. Гущина выполнено при поддержке РФФИ, грант 20-01-00646.

Требуется построить такое совместное распределение (X^*, Y^*), что $\mathrm{Law}(X^*, Y^*) \in \Pi$, $\mathrm{Law}(X^*) = \mu$ и для любого совместного распределения $\mathrm{Law}(X, Y) \in \Pi$ с маргинальным μ по первой координате, будет выполнено

$$\mathsf{P}(Y > \lambda) \geqslant \mathsf{P}(Y^* > \lambda), \quad \lambda \geqslant 0.$$

Для случайной величины X с $\mathrm{Law}(X) = \mu$ введем следующие обозначения:

$$F(x) := \mathsf{P}(X \leqslant x) \text{ — функция распределения } X,$$

$$Q(u) := \inf\{x\colon F(x) > u\}, \quad u \in (0,1), \text{ — верхняя квантильная функция } X,$$

$$J(x) := \int_0^x F(t)\,dt \text{ — интегральная функция распределения } X,$$

$$K(u) := \sup_{x \in \mathbb{R}}[xu - J(x)] \text{ — интегральная квантильная функция } X.$$

Функция K неотрицательна и выпукла, $\inf_u K(u) = 0$, $K(0) = \mathsf{E}(X^-)$, $K(1) = \mathsf{E}(X^+)$, $Q(u)$ совпадает с правой производной K в точке u для $u \in (0,1)$. Эти и другие факты можно найти в статье [5].

Зададим случайные величины X^* и Y^* на интервале $(0,1)$ с борелевской σ-алгеброй и мерой Лебега P. А именно, положим $X^*(u) = Q(u)$, $u \in (0,1)$, и определим $Y^*(u) = X^*(u)$, если $Q(u) \geqslant 0$. Если $Q(u) < 0$ и $u > 0$, то определим $Y^*(u)$ как единственный корень уравнения (с неизвестным λ)

$$\lambda(1+u) - J(\lambda) = K(u). \tag{2}$$

$Y^*(u)$ строго убывает и непрерывна, когда u меняется от 0 до $\sup\{u\colon Q(u) < 0\} = \mathsf{P}(X < 0)$, при этом $Y^*(u)$ изменяется от λ_0 до 0, где λ_0 — корень уравнения (2) при $u = 0$, если он существует, и $+\infty$ в противном случае; если $\lambda_0 < \infty$, то $\mathsf{E}(X \wedge \lambda_0) = 0$. Обратное к $Y^*(u)$ отображение обозначим $V^*(\lambda)$, $0 < \lambda < \lambda_0$.

Теорема 1 *Пусть задано распределение μ.*

1. *Для построенных выше случайных величин X^* и Y^* имеют место* $\mathrm{Law}(X^*) = \mu$ *и* $\mathrm{Law}(X^*, Y^*) \in \Pi$.

2. *Для любой пары (X, Y) случайных величин с* $\mathrm{Law}(X) = \mu$ *и* $\mathrm{Law}(X, Y) \in \Pi$

$$\mathsf{P}(Y > \lambda) \geqslant \mathsf{P}(Y^* > \lambda), \quad \lambda \geqslant 0.$$

3. *В классе Π существует единственное распределение с маргинальными* $\mathrm{Law}(X^*)$ *и* $\mathrm{Law}(Y^*)$*, а именно* $\mathrm{Law}(X^*, Y^*)$*. В частности, минимум в (1) достигается на единственной паре.*

4. *Оптимальная пара (X^*, Y^*) удовлетворяет п.н.*

$$X^* = \begin{cases} Y^*, & \text{если } X^* \geqslant 0; \\ Q(V^*(Y^*)) & \text{если } X^* < 0. \end{cases}$$

Обратно, если выполнено предшествующее соотношение и $\mathrm{Law}(X^*) = \mu$*, то (X^*, Y^*) — оптимальная пара.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Perkins E.* The Cereteli–Davis solution to the H^1-embedding problem and an optimal embedding in Brownian motion. — In: Seminar on stochastic processes, 1985, Progress in Probability and Statistics, **12**, Birkhäuser, Boston, 1986, p. 172–223.

2. *Cox A. M. G.*, *Hobson D. G.* An optimal Skorokhod embedding for diffusions. Stochastic Process. Appl., 2004, **111**, № 1, p. 17–39.

3. *Rogers L.C.G.* The joint law of the maximum and terminal value of a martingale, Probab. Theory Relat. Fields, 1993, **95**, № 4, p. 451–466.

4. *Гущин А. А.* Совместное распределение макс-непрерывного локального субмартингала и его максимума, Теория вероятн. и ее примен., 2020, **65**, № 4, с. 693–709.

5. *Gushchin A. A.*, *Borzykh D. A.* Integrated quantile functions: properties and applications, Modern Stochastics: Theory and Applications, 2017, **4**, № 4, p. 285–314.

Применение бинарного дерева в задачах управления процессами с разладкой

(Данилова Н.В., Белявский Г.И., Южный федеральный университет, г. Ростов-на-Дону)

В докладе рассматривается задача управления для бинарной модели с разладкой. Рассматривается апостериорный подход, то есть в результате наблюдения обнаруживается разладка с последующей четкой и нечеткой кластеризацией вершин дерева. На основе этой кластеризации выстраивается алгоритм решения задачи. Используются как симметричный, так и несимметричный штрафы за недостижение поставленной цели управления. Далее анализируется возможность использования бинарной модели в качестве средства приближения непрерывной модели Блэка-Шоулса с разладкой, причем исследуется возможность редукции NP - полной задачи к P - полной задаче с потерей информации.

Задача управления решается в следующей постановке: $\min\limits_{\beta, x_0} E\big(\Phi(У_N, \xi)\big)$, при ограничениях: $У_n = y_0 + \sum_{i=1}^{n} \beta(i)\, \Delta S_i$, $n \in \{1, \dots, N\}$, $\Delta S_n = \varphi(S_{n-1}) a^{X_n} b^{1-X_n}$, $X_n \in \{0,1\}, P(X_n = 1/n < \theta) = q_\infty$, $P(X_n = 1/n \geq \theta) = q_0$., $y_0 \leq \alpha$. Разладка θ – случайная величина с множеством значений $\boldsymbol{Z} = \{1,2, \dots\}$ и известным распределением вероятностей. Предполагается, что математическое ожидание $E|\Phi(Y_N, \xi)| < \infty$. Модель функционирует на естественном стохастическом базисе $\langle \Omega, (F)_{n \geq 0}, F, P \rangle$. Справедливо утверждение.

Утверждение. Если мартингальная мера P^* ($\langle S_n, F_n, P^* \rangle$ - мартингал) существует и единственная, если существует решение задачи $\min\limits_{\eta} E\big(\Phi(\eta, \xi)\big)$ при ограничении: $E^* \eta \leq \alpha$, то задача управления имеет решение.

В этой задаче первое математическое ожидание вычисляется по исходной мере, в формировании которой участвует разладка. Второе математическое ожидание вычисляется по мартингальной мере.

Схема решения задачи управления такова: сначала находится η^* - решение задачи: $\min\limits_{\eta} E\big(\Phi(\eta, \xi)\big)$ при ограничении: $E^* \eta \leq \alpha$, затем вычисляется мартингал $Y_n = E^*(\eta^*/F_n)$ и разложение мартингала Y по мартингалу S.

В рассматриваемой модели существует единственная мартингальная мера, если для параметров модели выполняется неравенство: $a < 0 < b$.

Сначала в докладе рассматривается бинарное дерево с вершинами $\Big[\big(\mathrm{A}_n^i\big)_{i=0}^{2^n-1}\Big]_{n=0}^{N}$ в котором $A_n^i \to \{A_{n+1}^{2i}, A_{n+1}^{2i+1}\}$. Установливается изоморфизм между отрезками бинарной последовательности ω_1^n и вершинами дерева A_n^i. Этот изоморфизм задается следующим образом: отрезок бинарной последовательности ω_1^n изоморфен вершине A_n^i тогда и только тогда, когда $i = \sum_{k=1}^{n} 2^{n-k}\omega_k$.

Разладка в модели заменяется на ее оценку моментом остановки. Рассмотрим произвольный момент остановки τ, например, оценку разладки. Момент остановки разделяет вершины дерева на два класса в соответствии с правилом: вершина A_n^i относится к первому классу (H_1) вершин, если $\tau\left(A_n^i\right) = n$; если A_n^i относится к первому классу, то вершины A_{n+1}^{2i} и A_{n+1}^{2i+1} также относятся к первому классу. Остальные вершины дерева относятся ко второму классу (H_2).

Исходная мера в модели вычисляется с помощью рекуррентных уравнений, которые используют разбиение вершин дерева моментом остановки. Эти уравнения имеют следующий вид:

$$P\left(A_n^{2i+1}\right) = \begin{cases} q_0 P\left(A_{n-1}^i\right), A_{n-1}^i \in H_1 \\ q_\infty P\left(A_{n-1}^i\right), A_{n-1}^i \in H_2 \end{cases}, P\left(A_n^{2i}\right) = \begin{cases} (1-q_0) P\left(A_{n-1}^i\right), A_{n-1}^i \in H_1 \\ (1-q_\infty) P\left(A_{n-1}^i\right), A_{n-1}^i \in H_2 \end{cases}, P(A_0^0) = 1.$$

Далее рассматривается случайное блуждание: $\varsigma_0 = 0, \varsigma_n = \varsigma_{n-1} + X_n$ и редуцированное дерево с вершинами $\left\{A_n^i\right\}_{i=0}^n, n = 1,2 \dots, N$, и дугами $A_n^i \to A_{n+1}^i, A_n^i \to A_{n+1}^{i+1}$. Изоморфизм устанавливается между случайной величиной: ς_n и вершиной $A_n^{\varsigma_n}$. Для данного дерева мы используем нечеткую классификацию. Принадлежность вершины классу H_1 рассматривается как случайное событие, которое наступает с вероятностью $P\left(A_n^i \in H_1\right) = p_{n.i}$. Вероятности $p_{n.i}$ выражаются через отношения правдоподобия $\psi_n(i) = \frac{P(\theta \le n \,/\, \varsigma_n = i)}{P(\theta > n \,/\, \varsigma_n = i)} = \frac{\zeta_n(i)}{C_n^i q_\infty^i (1-q_\infty)^{n-i} P(\theta > n)}$, $\zeta_n(i) = \sum_{j=1}^{n} P(\varsigma_n = i \,/\, \theta = j)\, P(\theta = j)$, а именно, $p_{n,i} = \frac{\psi_n(i)}{1+\psi_n(i)}$. В докладе приводятся равенства, позволяющие вычислить $\zeta_n(i)$. Вероятности $p_{n,i}$ позволяют вычислить исходную меру для данной модели следующим образом $P(A_0^0) = 1, P(A_n^0) = P(A_{n-1}^0)\left((1-q_0)p_{n-1,0} + (1-q_\infty)\left(1-p_{n-1,0}\right)\right)$, $P(A_n^n) = P(A_{n-1}^{n-1})\left(q_0 p_{n-1,n} + q_\infty\left(1-p_{n-1,n}\right)\right)$, $P\left(A_n^i\right) = P\left(A_{n-1}^i\right)\left((1-q_0)p_{n-1,i} + (1-q_\infty)\left(1-p_{n-1,i}\right)\right) + P\left(A_{n-1}^{i-1}\right)\left(q_0 p_{n-1,i} + q_\infty\left(1-p_{n-1,i}\right)\right), i \ne 0, i \ne n$.

В докладе рассматривается бинарная аппроксимация уравнения Блэка – Шоулса с разладкой: $dS_t = S_t\left(\left(m_1 I(t < \theta) + m_2 I(t \ge \theta)\right)dt + \sigma dW_t\right)$, W_t – стандартное броуновское движение, которая выглядит следующим образом: $\Delta S_{nh}^h = S_{(n-1)h}^h \left(\sigma\sqrt{h}\right)^{X_n}\left(-\sigma\sqrt{h}\right)^{1-X_n}$, $q_\infty = P(X_i = 1 \;/\; i \le \theta) = \frac{1}{2} + \frac{m_1\sqrt{h}}{2\sigma}$, $q_0 = P(X_i = 1/i > \theta) = \frac{1}{2} + \frac{m_2\sqrt{h}}{2\sigma}$.

Для этой модели рассматриваются задачи оптимального инвестирования для различных критериев качества портфеля инвестиций.

В докладе приводятся и комментируются примеры вычислений. Приводится и комментируется список литературы.

Димитров Д.В. (Москва, Россия) — **Статистические методы определения неоднородностей волокнистых материалов с помощью статистик ближайших соседей.**

В работе рассматривается применение оценок k-ближайших соседей дивергенции Кульбака–Лейблера [5] к поиску областей неоднородности в материалах. Асимптотические свойства таких оценок (а именно: асимптотическая несмещенность и L^2 -состоятельность) были доказаны в недавней работе [2]. В статьях [1, 3] оценки дифференциальной энтропии Шеннона применяются для обнаружения неоднородностей в волокнистом материале, заполняющем параллелепипед $\Pi \subset \mathbb{R}^3$. Используется естественный подход, при котором выбирается скользящее окно достаточно малого размера, в пределах которого оценивается некоторая характеристика материала (фактически дифференциальная энтропия Шеннона распределения направлений волокон). Затем на основе собранных характеристик делается статистический вывод о свойствах этого материала.

В статье [4] оценки дивергенции Кульбака-Лейблера используются для обнаружения многомерных пространственных кластеров в модели Бернулли. Нами развиваются и обобщаются идеи этой работы для обнаружения произвольных неоднородностей в волокнистых материалах. Вводится понятие *волокна* — пары (X, T), где X — случайный вектор со значениями в $\mathbb{R}^{d_1} \cap \Pi$, который по смыслу является центром волокна, а T — случайный вектор со значениями в $\mathbb{R}^{d_2}$, который по смыслу является меткой или некоторым свойством волокна (например, направлением в пространстве). Именно среди таких меток и будет искаться неоднородность. Здесь предполагается, что Π — некоторое объемлющее множество или материал, $\Pi \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{d_1})$, $0 < \mu_{\mathbb{R}^{d_1}}(\Pi) < \infty$, $\mu_{\mathbb{R}^{d_1}}$ — мера Лебега в пространстве $\left(\mathbb{R}^{d_1}, \mathcal{B}(\mathbb{R}^{d_1})\right)$; $\mathsf{P}(X \in B) = \frac{\mu_{\mathbb{R}^{d_1}}(B)}{\mu_{\mathbb{R}^{d_1}}(\Pi)}$ для любого борелевского $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{d_1}) \cap \Pi$, а T имеет следующую природу: $T = \xi \cdot \mathbb{1}\{X \in R_0\} + \eta \cdot \mathbb{1}\{X \in \Pi \setminus R_0\}$, где ξ, η – некоторые случайные векторы со значениями в $\mathbb{R}^{d_2}$, $\mathsf{law}(\xi) \neq \mathsf{law}(\eta)$, $p_\xi := \frac{d\mathsf{P}_\xi}{d\mu_{\mathbb{R}^{d_2}}}$, $p_\eta := \frac{d\mathrm{P}_\eta}{d\mu_{\mathbb{R}^{d_2}}}$, $R_0 \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{d_1}) \cap \Pi$, $0 < \mu_{\mathbb{R}^{d_1}}(R_0) < \mu_{\mathbb{R}^{d_1}}(\Pi)$. В этом случае назовём R_0 областью неоднородности. Все случайные элементы определены на пополненном вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$.

Рассматривается модель (см. Рис. 1), в которой наблюдателю доступны $\{X_i, T_i, i \in \{1, \ldots, \zeta_n\}\}$, $\zeta_n \sim \mathrm{Pois}(\lambda_n \cdot \mu_{\mathbb{R}^{d_1}}(\Pi))$, где для любого $n \in \mathbb{N}$, $\lambda_n > 0$, $\lambda_n \to \infty$, $n \to \infty$. Отметим также, что $\{X_i, T_i, \zeta_i, i \in \mathbb{N}\}$ предполагаются независимыми, $\mathsf{law}(X_i) = \mathsf{law}(X)$, $\mathsf{law}(T_i) = \mathsf{law}(T)$ для любого $i \in \mathbb{N}$. Для каждого множества R из некоторого набора множеств $\mathcal{R}$ строится оценка $\widehat{T}_n(R) := \frac{1}{2}\left(\widehat{D}_n(R) + \widehat{D}_n(\overline{R})\right)$, где $\widehat{D}_n(A)$ – оценка k-ближайших соседей дивергенции Кульбака-Лейблера (см. статью [2]) между распределением меток T_j внутри окна A (то есть при $X_j \in A$) и вне его (то есть при $X_j \in \Pi \setminus A$). Оценка области неоднородности $\widehat{R}_n$ полагается равной аргументу максимума такой специальной статистики $\widehat{T}_n(R)$, взятого по всем окнам $R \in \mathcal{R}$, то есть $\widehat{R}_n := \operatorname*{argmax}_{R \in \mathcal{R}} \widehat{T}_n(R)$.

При широких условиях на плотности p_ξ и p_η удается доказать состоятельность предложенной процедуры.

Теорема 1 *Пусть для некоторых* $\varepsilon, R > 0$, $N \in \mathbb{N}$, $f \in \{p_\xi, p_\eta\}$, $g \in \{p_\xi, p_\eta\}$ *функционалы* $K_{f,g}(2, N)$, $Q_{f,g}(\varepsilon, R)$, $T_{f,g}(\varepsilon, R)$ *конечны. Тогда*

$$\mathsf{P}\left(\widehat{R}_n \in \operatorname*{argmax}_{R \in \mathcal{R}} d_\Pi(R, R_0)\right) \to 1, n \to \infty.$$

Здесь $d_\Pi(R, R_0) := \left|\frac{\mu(RR_0)}{\mu(R)} - \frac{\mu(\overline{R}R_0)}{\mu(\overline{R})}\right|$, $\overline{R} := \Pi \setminus R$, *а определения функционалов* K_{f_1,f_2}, Q_{f_1,f_2}, T_{f_1,f_2} *для плотностей* f_1, f_2 *можно найти в статье [2].*

Работа выполнена при поддержке гранта МГУ им.М.В.Ломоносова “Современные проблемы фундаментальной математики и механики”.

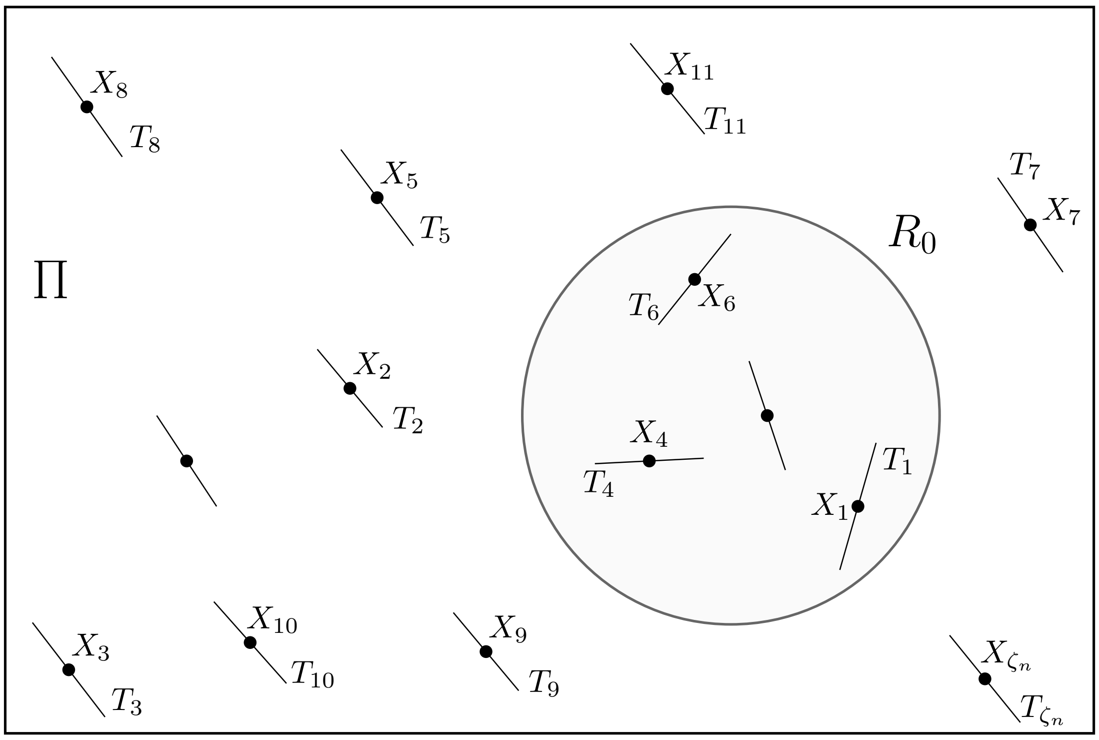

Рис. 1: Исследуемый волокнистый материал Π с областью неоднородности R_0

В процессе доказательства Теоремы 1 также устанавливаются новые результаты, касающиеся асимптотической несмещенности и L^2-состоятельности оценок $\widehat{D}_n(A)$ (в оценку входит сумма пуассоновского числа случайных величин; ранее в работе [2] асимптотические свойста были установлены только для оценок, вовлекающих суммы постоянного числа схожих случайных величин).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Alonso-Ruiz, P., Spodarev, E.* (2018). Entropy-based inhomogeneity detection in fiber materials. *Methodology and Computing in Applied Probability.* **20**, 1223—1239.

2. *Bulinski, A., Dimitrov, D.* (2021). Statistical Estimation of the Kullback–Leibler Divergence. *Mathematics.* **9**, 544, 1–36.

3. *Dresvyanskiy, D., Karaseva, T., Makogin, V., Mitrofanov, S., Redenbach, C., Spodarev, E.* (2020). Detecting anomalies in fibre systems using 3-dimensional image data. *Statistics and Computing.* **30**, 4, 817–837.

4. *Walther, G.* (2010). Optimal and fast detection of spatial clusters with scan statistics. *The Annals of Statis-tics.* **38**, 1010–1033.

5. *Wang, Q., Kulkarni, S.R., Verdú, S.* (2009). Divergence estimation for multidimensional densities via k-nearest-neighbor distances. *IEEE Transactions on Information Theory.* **55**, 2392–2405.

Оптимальное управление линейной стохастической системой

В.Г. Задорожний, Воронежский госуниверситет

Рассматривается управляемая линейная система дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = \varepsilon(t)Ax + bu(t) \tag{1}$$

с начальным условием

$$x(t_0) = x_0 \tag{2}$$

и квадратичным критерием качества управления

$$I = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1}\int_{t_0}^{t_1}[\langle B(s_1,s_2)E[x(s_1)], E[x(s_2)]\rangle +$$

$$C(s_1,s_2)E[u(s_1)]E[u(s_2)]]ds_1ds_2 + \frac{1}{2}\langle GE[x(t_1)], E[x(t_1)]\rangle \tag{3}$$

Здесь t – вещественная переменная (время), t_0, t_1 – заданные числа, x является n-мерной векторной функцией, A – заданная вещестенная матрица размера $n \times n$, b – заданный n-мерный вектор, $u(t)$ – скалярная функция (управление), x_0 – случайный вектор, $\langle\cdot,\cdot\rangle$ обозначает скалярное произведение, ε – случайный процесс, заданный характеристическим функционалом $\psi(v)$, $B(s_1,s_2)$ – заданная самосопряженная неотрицательная матричная функция размера $n \times n$, $C(s_1,s_2)$ – заданная положительная функция, G – заданная неотрицательная матрица размера $n \times n$, $E[x(t)]$ обозначает математическое ожидание случайного процесса.

Постановка задачи. Найти математическое ожидание $E[u(t)]$ независимого с ε случайного процесса $u(t)$, при котором функционал (3) принимает наименьшее значение и при этом выполняются условия (1), (2).

Введем функцию $\chi(s) = \chi(t_0, t, s)$ переменной s, которая равна $sign(s-t_0)$ если s принадлежит отрезку с концами $min[t_0, t]$, $max[t_0, t]$ и равна нулю, если s не принадлежит указанному отрезку.

Теорема. Если $E[u(t)]$ является решением задачи, то оно удовлетворяет интегральному уравнению Фредгольма

$$\int_{t_0}^{t_1} W(s,t)E[u(s)]ds = F(t),$$

в котором

$$W(s,t) = \int_s^{t_1}\int_t^{t_1}\langle B(s_1,t)\psi(-i\chi(s,s_1)A)E[x_0], \psi(-i\chi(t,s_2)A)b\rangle ds_2ds_1 +$$

$$C(s,t) + \langle G\psi(-i\chi(s,t_1)A)b, \psi(-i\chi(t,t_1)A)b\rangle,$$

$$F(t) = -\int_{t_0}^{t_1}\langle B(s_1,s_2)\psi(-i\chi(t_0,s_1)A)E[x_0], \psi(-i\chi(t,s_2)A)b\rangle ds_1ds_2$$

О стационарном распределении процесса обслуживания неординарных потоков с разделением времени при пороговом алгоритме переключения

А.В. Зорин

1 Введение

Приоритетные системы обслуживания с динамическими приоритетами (т.е., приоритетными индексами очередей, зависящим от их длин в момент принятия решения) и повторными требованиями, рассматривались в работах [1, 2, 3]. Они являются адекватными моделями для процессов обработки информации в вычислительных комплексах. Основной результат этих исследование состоит в следующем: алгоритм назначения приоритетных индексов, для которого будет минимальным математическое ожидание стоимости пребывания в системе всех требований (за единицу времени или за один рабочий акт обслуживающего устройства), является классическое правило постоянных приоритетных индексов, которые назначаются заранее по данным о средних длительностях обслуживания и о стоимостях пребывания индивидуальных требований за единицу времени.

В то же время, представляют интерес и другие задачи оптимизации. В работе [4] решалась задача минимизации среднего времени достижения процессом заданного множества состояний. При специальном виде областей разрешенной, финальной и запрещенной, наилучшие результаты (по сравнению с приоритетным алгоритмом и алгоритмом обслуживания самой длинной очереди) показывал «пороговый» алгоритм. В связи с этим, естественна задача анализа процесса обслуживания в классе пороговых алгоримов. В настоящей работе будет решаться задача определения (вычисления численными методами) стационарного распределения в терминах производящих функций, что в дальнейшем позволяет находить теоретические числовые характеристики процесса обслуживания и длин очередей численными методами теории функций комплексного переменного.

2 Постановка задачи

В систему поступают два неординарных пуассоновских потока Π_1, Π_2. Интенсивность поступления групп требований по потоку Π_j, $j = 1, 2$, равна $\lambda_j > 0$, а вероятность прихода группы размера n равна $f(b, j) \geqslant 0$, $b = 1, 2, \ldots$; $\sum\limits_{b=1}^{\infty} f(b, j) = 1$. Требования потока Π_j поступают в накопитель O_j неограниченной вместимости. Обслуживание требования из очереди O_j имеет экспоненциальное распределение с параметром β_j. Обслуженное требование из очереди O_j с вероятностью $p_{j,r}$ поступает на повторное обслуживание в очередь O_r, $r = 1, 2$, а с вероятностью $p_{j,0} = 1 - p_{j,1} - p_{j,2} \geqslant 0$ покидает систему. После каждого акта обслуживания требования из очереди O_j обслуживающее устройство производит операцию внутренней переналадки, длительность которой распределена по показательному распределению с параметром $\bar{\beta}_j$. Если в момент окончания переналадки длины очередей описываются ненулевым вектором (x_1, x_2), то на обслуживание выбирается требование из очереди $s = h(x_1, x_2)$, где $h(\cdot, \cdot)$ есть заданное отображение неотрицательной целочисленной решетки $X = \{0, 1, \ldots\} \times \{0, 1, \ldots\}$ на множество $\{0, 1, 2\}$, причем равенство $s = h(x_1, x_2)$ влечет $x_s > 0$, а прообразом точки 0 является только нулевой вектор $\bar{0} = (0, 0)$ из решетки X. Если после окончания переналадки очереди пусты, обслуживающее устройство переходит в режим ожидания поступления новых требований. При поступлении первой группы требований в пустую систему мгновенно начинается обслуживание одного и требований в группе, остальные занимают места в очереди, соответствующей потоку.

Пусть $\kappa_j(t)$ — число требований в очереди O_j в момент $t \geqslant 0$, $\kappa(t) = (\kappa_1(t), \kappa_2(t))$. Введем множество $\Gamma = \{\Gamma^{(0)}, \Gamma^{(1)}, \ldots, \Gamma^{(4)}\}$ состояний обслуживающего устройства; здесь $\Gamma^{(0)}$ есть состояние ожидания прихода нового требования, в состоянии $\Gamma^{(j)}$ при $j = 1$, 2 происходит обслуживание требования их очереди O_j, а при $j = 3$, 4 осуществляется акт переналадки после обслуживания требования из очереди O_{j-2}. Случайный элемент $\Gamma(t) \in \Gamma$ задает состояние обслуживающего устройства в момент $t \geqslant 0$.

Процесс $\{(\Gamma(t), \kappa(t)); t \geqslant 0\}$ является однородным марковским. Его пространство состояний можно взять в виде $\{(\Gamma^{(0)}, 0, 0)\} \cup \{\Gamma^{(1)}, \Gamma^{(2)}, \Gamma^{(3)}, \Gamma^{(4)}\} \times X \times X$. Обозначим

$$Q(r, x_1, x_2; t) = \mathbf{P}(\{\Gamma(t) = \Gamma^{(r)}, \kappa(t) = (x_1, x_2)\}); \qquad f_j(z) = \sum_{b=1}^{\infty} z^b f(b, j), \qquad |z| \leqslant 1;$$

$$\Psi(z_1, z_2, r; t) = \mathbf{E}\big(z_1^{\kappa_1(t)} z_2^{\kappa_2(t)} I(\Gamma(t) = \Gamma^{(r)})\big) = \sum_{x_1=0}^{\infty} \sum_{x_2=0}^{\infty} z_1^{x_1} z_2^{x_2} Q(r, x_1, x_2; t), \quad |z_1| < 1.|z_2| < 1.$$

Теорема 1. *Для $r = 1$, 2 имеют место уравнения*

$$\frac{\partial}{\partial t}\Psi(z_1, z_2, r; t) = \Psi(z_1, z_2, r; t)(\lambda_1(f_1(z_1) - 1) + \lambda_2(f_2(z_2) - 1) - \beta_r) +$$
$$+ \sum_{j=1}^{2} \bar{\beta}_j \mathbf{E}\big(z_1^{\kappa_1(t)} z_2^{\kappa_2(t)} I(\{\Gamma(t) = \Gamma^{(2+j)}, h(\kappa_1(t), \kappa_2(t)) = r\})\big) + \lambda_r f_r(z_r) Q(0, 0, 0; t), \tag{1}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\Psi(z_1, z_2, 2 + r; t) = \Psi(z_1, z_2, 2 + r; t)(\lambda_1(f_1(z_1) - 1) + \lambda_2(f_2(z_2) - 1) - \bar{\beta}_r) +$$
$$+ \beta_r z_r^{-1}(1 + p_{r,1}(z_1 - 1) + p_{r,2}(z_2 - 1))\Psi(z_1, z_2, r; t), \tag{2}$$

$$\frac{d}{dt} Q(0, 0, 0, t) = -(\lambda_1 + \lambda_2) Q(0, 0, 0; t) + \bar{\beta}_1 Q(3, 0, 0, t) + \bar{\beta}_2 Q(4, 0, 0, t). \tag{3}$$

3 О решении стационарных уравнений

В дальнейшем нас будут интересовать стационарные вероятности, выбрав которые в качестве начальных получим

$$Q(r, x_1, x_2) = \lim_{t\to\infty} Q(r, x_1, x_2; t), \qquad \Psi(z_1, z_2, r) = \lim_{t\to\infty} \Psi(z_1, z_2, r; t).$$

Обозначим через $\mu_j = f_j'(1)$ средний размер группы по потоку Π_j. Введем векторы и матрицу

$$\beta = (\beta_1^{-1}, \beta_2^{-1}), \quad \bar{\beta} = (\bar{\beta}_1^{-1}, \bar{\beta}_2^{-1}), \quad \bar{\lambda} = \begin{pmatrix} \lambda_1\mu_1 \\ \lambda_2\mu_2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Q} = \begin{pmatrix} p_{1,1} & p_{1,2} \\ p_{2,1} & p_{2,2} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Пусть матрица $(\mathbf{I} - \mathbf{Q})$ обратима.

Теорема 2. *Имеют место соотношения*

$$Q(0, 0, 0) = 1 - (\beta + \bar{\beta})(\mathbf{I} - \mathbf{Q}^T)^{-1}\bar{\lambda},$$

$$\Psi(1,1,1) = \frac{\beta_2\beta(\mathbf{I}-\mathbf{Q}^T)^{-1}\bar{\lambda} - (1,1)(\mathbf{I}-\mathbf{Q}^T)^{-1}\bar{\lambda}}{\beta_2-\beta_1},$$
$$\Psi(1,1,2) = \frac{(1,1)(\mathbf{I}-\mathbf{Q}^T)^{-1}\bar{\lambda} - \beta_1\beta(\mathbf{I}-\mathbf{Q}^T)^{-1}\bar{\lambda}}{\beta_2-\beta_1},$$
$$\Psi(1,1,3) = \frac{\bar{\beta}_2\bar{\beta}(\mathbf{I}-\mathbf{Q}^T)^{-1}\bar{\lambda} - (1,1)(\mathbf{I}-\mathbf{Q}^T)^{-1}\bar{\lambda}}{\bar{\beta}_2-\bar{\beta}_1},$$
$$\Psi(1,1,4) = \frac{(1,1)(\mathbf{I}-\mathbf{Q}^T)^{-1}\bar{\lambda} - \bar{\beta}_1\bar{\beta}(\mathbf{I}-\mathbf{Q}^T)^{-1}\bar{\lambda}}{\bar{\beta}_2-\bar{\beta}_1}.$$

Эти формулы не зависят от функции переключения $h(\cdot)$.

Пользуясь методом из работы [4], можно доказать, что условие $(\beta+\bar{\beta})(\mathbf{I}-\mathbf{Q}^T)^{-1}\bar{\lambda} < 1$ является необходимым и достаточным для существования стационарного распределения.

Рассмотрим алгоритм порогового типа: пусть $L \geqslant 0$ — целое

$$h(x_1,x_2) = \begin{cases} 1, & \text{если } x_1 > L \text{ или } x_2 = 0, x_1 > 0 \\ 2, & \text{если } x_1 \leqslant L, x_2 > 0 \\ 0, & \text{если } x_1 = x_2 = 0 \end{cases}$$

В этом случае, имеют место соотношения (в стационарном случае):

$$\mathbf{E}\big(z_1^{\kappa_1(t)} z_2^{\kappa_2(t)} I(\{\Gamma(t) = \Gamma^{(2+j)}, h(\kappa_1(t),\kappa_2(t)) = 1\})\big) = \Psi(z_1,z_2,2+j) - \Psi(0,z_2,2+j) -$$
$$- \sum_{k=1}^{L} \frac{z_1^k}{k!}\frac{\partial^k}{\partial z_1^k}(\Psi(z_1,z_2,2+j) - \Psi(z_1,0,2+j))\Big|_{z_1=0},$$
$$\mathbf{E}\big(z_1^{\kappa_1(t)} z_2^{\kappa_2(t)} I(\{\Gamma(t) = \Gamma^{(2+j)}, \kappa(t) \in X_2\})\big) = \Psi(0,z_2,2+j) - \Psi(0,0,2+j) +$$
$$+ \sum_{k=1}^{L} \frac{z_1^k}{k!}\frac{\partial^k}{\partial z_1^k}(\Psi(z_1,z_2,2+j) - \Psi(z_1,0,2+j))\Big|_{z_1=0},$$
$$\Psi(0,0,2+j) = Q(2+j,0,0).$$

Решение стационарных уравнений в данном случае ведет к громоздким вычислениями, в следствие чего оказывается затруднительно аналитически выяснять вопросы о разрешимости некоторых вспомогательных уравнений, о числе их решений. В докладе обсуждается возможность использования систем символьных вычислений и компьютерной алгебры для решения указанной задачи.

Список литературы

[1] Климов Г. П. Системы обслуживания с разделением времени. I // Теория вероятностей и ее применения. — 1974. — Т. 19, Вып. 3. — С. 558–576.

[2] Китаев М.Ю., Рыков В.В. Системы обслуживания с ветвящимися потоками вторичных требований // Автоматика и телемеханика. — 1980. — № 9. — С. 52–61.

[3] Федоткин М.А. Оптимальное управление конфликтными потоками и маркированные точечные процессы с выделенной дискретной компонентой, I // Литовский математический сборник. — 1988. — Т. 28, №. 4. — С. 784–794.

[4] Zorine A.V. On ergodicity conditions in a polling model with Markov modulated input and state-dependent routing / A.V. Zorine // Queueing systems. — 2014. — V. 76. — № 2. — P. 223–241.

ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ ДРОБНЫХ АБСТРАКТНЫХ СТОХАСТИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ[1]

Илолов М., Рахматов Дж.Ш.Лашкарбеков С.М.[2]
ilolov.mamadsho@gmail.com

Задача Коши для дробных абстрактных стохастических дифференциальных уравнений

Пусть H сепарабельное гильбертово пространство и A действующий в нем почти секториальный оператор порждающий аналитическую полугруппу $T(t)$.

Рассмотрим в H дробную задачу Коши

$$D_t^\alpha X(t) = (AX(t)+F(t,X(t)))dt^\alpha+b(t,X(t))dW(t), t\in[0,1], X(0)=\xi, \tag{1}$$

где D_t^α - дробная производная Капуто порядка $\alpha, 0<\alpha<1$, $W(t)$ - винеровский процесс со значениями в некотором другом сепарабельном векторном пространстве H^1. $F(t,X)$ - отбражение из H в H, $B(t,X)$ - оператор действующий из H в пространстве линейных операторов Гильберта-Шмидта $\mathfrak{L}_{HS}(H_Q^1, H)$.

Пусть $(\Omega,\mathfrak{F},P)$ - вероятностная тройка с нормальной фильтрацией $\mathfrak{F}_t, t\geq 0$.

С почти секториальным оператором T связаны следующие три семейства операторов, а именно

$$T(t)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma e^{-tz}R(z,A)Dz, t\geq 0 \tag{2}$$

$$S_2=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma E_\alpha(-zt^\alpha)R(z,A)Dz, t\geq 0 \tag{3}$$

$$P_\alpha(t)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma e_\alpha(-zt^\alpha)R(z,A)Dz, t\geq 0 \tag{4}$$

где контурный интеграл Γ ориентирован против часовой стрелки, $E_\alpha(z), e_\alpha(z)$ - функции Миттаг-Леффлера, $0<\alpha<1, z\in\mathbb{C}$.

---

[1]М. Илолов, Дж.Ш. Рахматов, С.М. Лашкарбеков

Запишем задачу Коши (1) в интегральной форме

$$X(t) = \xi + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1}[Ax(s) + F(s, X(s))]ds +$$

$$+ \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} B(s, X(s)) dW(s),$$

где X-искомый H-значный случайный предсказуемый процесс, ξ – $\mathfrak{F}_0$-измеримая H значная случайная величина, A почти секториальный оператор порождающий семейства операторов (2), (3), (4); отображение $F(t, X(t)) : H \to H$; Q-неотрицательный оператор следа в H^1 такой, что $Qe_j = \sigma_j^2 e_j, \sum_{j=1}^{\infty} \sigma_j^2 < \infty$; оператор $B(t, X(t))$ - оператор Гильберта-Шмидта из пространства $H_Q^1 = Q^{1/2}H^1$ с нормой $\|h\|_Q = \|Q^{-1}h\|_{H^1}$ в пространство H, далее пространство операторов Гильберта-Шмидта из H_Q^1 в H будем обозначать $\mathfrak{L}_{HS}$; $W(t), t \geq 0 - H^1$ - значный Q - винеровский процесс.

При фиксированном $T > 0$ заданы следующие условия на коэффициенты F, B:

(i) отображение $F : [0, T] \times \Omega \times H \to H$, $(t, \omega, x) \to F(t, \omega, x)$ измеримо из $(\Omega_T \times H, \mathfrak{P}_T \times \mathfrak{B}(H))$ в $(H, \mathfrak{B}(H))$;

(ii) отображение $B : [0, T] \times \Omega \times H \to \mathfrak{L}_{HS}$, $(t, \omega, x) \to B(t, \omega, x)$ измеримо из $(\Omega_T \times H, \mathfrak{P}_T \times \mathfrak{B}(H))$ в $(\mathfrak{L}_{HS}, \mathfrak{B}(\mathfrak{L}_{HS}))$;

(iii) существует такая постоянная $c > 0$ что $F(\cdot)$ и $B(\cdot)$ удовлетворяют условиям Липшица и линейного роста:

$$\begin{cases} \|F(t,\omega,x) - F(t,\omega,y)\|_H + \|B(t,\omega,x) - B(t,\omega,y)\|_{\mathfrak{L}} \leq C\|x-y\|_H, \\ \|F(t,\omega,x)\|_H^2 + \|B(t,\omega,x)\|_{\mathfrak{L}_{HS}}^2 \leq C^2(1 + \|x\|_H^2), \end{cases} \tag{5}$$

где $x, y \in H, t \in [0, T], \mathfrak{P}_T$ - предсказуемая σ-алгебра на $\Omega_T = [0, T] \times \Omega$.

Предсказуемый H-значный процесс $X(t), t \in [0, T]$ называется слабым решением задачи Коши (1), если

$$P\left(\int_0^t \|x(s)\|^2 ds \leq \infty \right) = 1$$

для почти всех ω, для любого $t \in [0, T]$ и для любого $y \in D(A^*)$ справедливо равество

$$< y, X(t) >=< y, \xi > + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} [< A^* y, X(s) > + < y, F(s, X(s)) >] +$$

$$+ \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t < y, B(s, X(s)) > DW(s). \qquad (7)$$

Предсказуемый H-значный процесс $X(t), t \in [0, T]$ называется мягким решением задачи Коши (1), если выполнены (1) и (6), и кроме того, $X(t)$ для любого $t \in [0, T]$ удовлетворяет уравнению

$$X(t) = S_\alpha(t)\xi + \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} P_\alpha(t-s) F(s, X(s)) ds +$$

$$+ \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} P_\alpha(t-s) B(s, X(s)) dW(s). \qquad (8)$$

Теорема 1. *Пусть* $\xi - \mathfrak{F}_0$*-измеримая* H*-значная случайная величина и условия (i)-(iii) выполнены. Тогда существует мягкое решение* X *задачи (1) единственное с точностью до эквивалентности среди процессов, удовлетворяющих условию (6).*

Теорема 2. *Пусть* X H*-значный предсказуемый процесс с интегрируемыми траекториями, оператор* A *порождает семейства ограниченных операторов (2), (3), (4), оператор* $F(s, X(s))$ *- отображение из* H *в* H*, оператор* $B(s, X(s))$ *удовлетворяет условию существования интеграла Ито, то есть*

$$E \int_0^t \|(t-s)^{\alpha-1} P_\alpha(t-s) B(s, X(s))\|^2 \mathfrak{L}_{HS}(H_Q^1, Q) < \infty.$$

Если для любого $t \in [0, T]$ и $y \in D(A^*)$ решение $X(t)$ удовлетворяет равенству (7), тогда $X(t)$ удовлетворяет равенству (8) и обратно.

В детерминированном случае абстрактная задача Коши с почти секториальными операторами подробно изучена в [1]. Абстрактные стохастические уравнения с целыми порядками производных и их приложения рассматриваются в [2], [3].

Литература

1. Rong-Nian Wang, De Han Chen, Ti-Jun Xiao. Abstract fractional Cauchy problem with almost sectorial operators / Rong-Nian Wang, De

Han Chen, Ti-Jun Xiao.//J.Differential Equations — 2012. — № 252. — pp. 202–235.

2. Старкова О.С. Стохастическая задача Коши в гильбертовом пространстве: модели, примеры, решения / О.С. Старкова // Вестник ЮУрГУ. Серия "Математическое моделирование и програмирование"(Вестник ЮУрГУ ММГ) — 2016. — № 9(4). — С. 63–72.

3. 9. Ilolov M., Kuchakshoev K.S., Rahmatov J.Sh. Fractional stochastic evolution equations: Whitenoise model /M. Ilolov, K.S. Kuchakshoev, J.Sh. Rahmatov// Communications in Stochastic Analysis — 2020 —№ 14(3-4) — pp. 55-69

О ПОВЕРХНОСТЯХ ПОЧТИ ОГРАНИЧЕННОГО ИСКРИВЛЕНИЯ

Д.С. Климентов

(Южный федеральный университет, Ростов–на–Дону; Россия)

E-mail address: dklimentov75@gmail.com

Рассмотрим последовательность гладких поверхностей S_n со следующими свойствами:

- I_n, II_n — первая и вторая основные формы поверхности S_n;
- II_n положительно определена для любого n;
- $\lim_{n\to\infty} g_{ij}^{(n)} = g_{ij}$, то есть метрики на S_n равномерно сходятся к метрике на предельной поверхности S;
- коэффициенты вторых форм II_n $b_{ij}^{(n)}$ и их частные производные сходятся по мере Винера в L_2.

Предельную поверхность с предельными же основными формами будем называть поверхностью почти ограниченного искривления.

Теорема 0.1. *На поверхности почти ограниченного искривления имеет место уравнение Гаусса в слабом смысле.*

Pricing double barrier options under Lévy processes of unbounded variation

Oleg Kudryavtsev[a,b,*]

[a] *Russian Customs Academy, Rostov branch, Rostov-on-Don, Russian Federation*
[b] *Southern Federal University, Rostov-on-Don, Russian Federation*

Keywords: Wiener-Hopf factorization, Lévy processes, Numerical methods, Option pricing

The most popular path-dependent options are barrier options, which include double barrier options. Let a stochastic process S_t be a model for the chosen stock price dynamics. Recall that a double barrier option on the stock is a contract which pays the specified amount $G(S_T)$ at the terminal date T, provided during its lifetime, the price of the stock does not cross specified constant barriers D from above and U from below. When at least one of the barriers is crossed, the option expires worthless, or the option owner is entitled to some *rebate*.

From a probabilistic viewpoint, one can express double barrier option prices in terms of conditional expectation on a payoff function that depends on the underlying stochastic process and its extrema. Notice that the known results on pricing double barrier options are rather limited. In analytical terms, the option pricing problem under consideration leads to a matrix Wiener-Hopf factorization (see details in [3]), which is not analytically available yet. To treat the problem in general case numerically, one should apply the Laplace transform (or the Carr's randomization), then solve two coupled complex integrodifferential equations that require complicated approximate formulas for the Wiener-Hopf factors. The overview of the existing numerical methods can be found in [2, 5, 6, 8, 11, 9, 12, 10]. Therefore, pricing double barrier options in exponential Lévy models remains a computational challenge.

In the paper [10], the author suggested a new approach for pricing exotic options with a payoff depending on the infimum and supremum of Lévy processes at expiry. The method suggested makes it easy to implement such a sophisticated tool as the Wiener-Hopf factorization for general Lévy models with jumps of finite variation. The goal of the current paper is to extend the approach from [10] to pure non-Gaussian Lévy processes with jumps of unbounded variation. The main advantage of the method is applying semi-explicit Wiener-Hopf factorization formulas.

A Lévy process is a stochastically continuous process with stationary independent increments (for general definitions, see, e.g., [4]). A Lévy model may have a Gaussian component and pure jump component. A Lévy process X_t can be completely specified by its characteristic exponent, ψ, definable from the equality $E[e^{i\xi X(t)}] = e^{-t\psi(\xi)}$ (we confine ourselves to the one-dimensional case).

The Lévy-Khintchine formula gives the characteristic exponent of a pure non-Gaussian Lévy process:

$$-i\gamma\xi + \int_{\mathbf{R}} (1 - e^{i\xi x} + i\xi x \mathbf{1}_{[-1,1]}(x))\Pi(dx), \tag{1}$$

where $\gamma \in \mathbf{R}$ is the drift, $\mathbf{1}_A$ is the indicator function of the set A, and the Lévy measure $\Pi(dx)$

*Corresponding author
Email address: `koe@donrta.ru` (Oleg Kudryavtsev)

satisfies $\int_{\mathbf{R}} \min\{1, x^2\}\Pi(dx) < +\infty$. If the condition

$$\int_{\mathbf{R}} \min\{1, |x|\}\Pi(dx) < +\infty. \tag{2}$$

does not hold, then the Lévy process X_t is of unbounded variation.

Let T, K, D, U be the maturity, strike, the lower barrier, and the upper barrier, and the stock price $S_t = De^{X_t}$ be an exponential Lévy process under a chosen risk-neutral measure which is pure non-Gaussian with jumps of unbounded variation. Without loss of generality, we confine ourselves to a double barrier put option. Set the riskless rate and the dividend rate equal to r and d, respectively. We consider an approach to pricing continuously monitored double barrier put options without rebate under a Lévy process with the characteristic exponent (1) that does not satisfies (2).

Let us introduce $h = \ln U/D$. Then the payoff at maturity is $\mathbf{1}_{(0,h)}(X_T)G(X_T)$, where $G(x) = (K - De^x)_+$, and the no-arbitrage price of the double barrier put option at the beginning of a period under consideration ($t = 0$) and $X_t = x$ with $x \in (0, h)$ given by

$$V(T, x) = E^x \left[e^{-rT} \mathbf{1}_{\underline{X}_T > 0} \mathbf{1}_{\overline{X}_T < h} G(X_T) \right], \tag{3}$$

where T is the final date, $\underline{X}_t = \inf_{0 \le s \le t} X_t$ and $\overline{X}_t = \sup_{0 \le s \le t} X_t$ are the infimum and the supremum of the process X_t, respectively. The short-hand notation $E^x[\cdot]$ means that we take the expectation conditioned on the event $X_0 = \underline{X}_0 = \overline{X}_0 = x$.

Theorem 1. *Let N be a sufficiently large natural number. Set $q = T/N$, $v_0(q, x) = G(x)\mathbf{1}_{(0,h)}(x)$, and for $n = 1, 2, \ldots$ define*

$$v_n(q, x) = E^x \left[\frac{v_{n-1}(q, X_{T_{q+r}})}{(1 + r/q)} \mathbf{1}_{\underline{X}_{T_{q+r}} > 0} \mathbf{1}_{\overline{X}_{T_{q+r}} < h} \right], \tag{4}$$

where the random time $T_{q+r} \sim \mathrm{Exp}\,(q + r)$.

For a fixed x, $v_N(N/T, x)$ converges to $V(T, x)$ as $N \to +\infty$.

We prove Theorem 1 by using Laplace transform techniques and Post-Widder approximate formula. Thus, we need a method to compute efficiently the right hand side of (4).

The new approach to calculating (4) requires the following steps. The key idea behind the method is to represent the process X_t as the sum of spectrally positive jumps X_t^+ with a non-negative drift and spectrally negative jumps X_t^- with a non-positive drift: $X_t = X_t^+ + X_t^-$.

Let $X_t^{+,1}$ and $X_t^{+,2}$ be Lévy processes with the same characteristic exponent, i.e. $X_t^{+,1} \sim X_t^+$ and $X_t^{+,2} \sim X_t^+$. Due to the property of increments of a Lévy process to be stationary independent and characteristics of the supremum and infimum processes, we conclude that X_t and $Y_t (= \underline{X}_{t/2}^{+,1} + \overline{X}_{t/2}^{+,1} + \overline{X}_t^- + \underline{X}_t^- + \underline{X}_{t/2}^{+,2} + \overline{X}_{t/2}^{+,2})$ are identically distributed.

Let a natural number N be sufficiently large and $q = N/T$. Since the randomized time T_{q+r} converges in mean square sense to 0 as $N \to +\infty$, we may approximate $X_{T_{q+r}}$ in (4) with $Y_{T_{q+r}}$. Notice that $T_{q+r}/2$ is also an exponentially distributed random variable but with the intensity parameter equal to $2(q + r)$. We show that $X_{T_{2(q+r)}}^+$ and $X_{T_{q+r}}^-$ admit semi-explicit Wiener-Hopf factorizations.

Theorem 2. *Let $q > 0$ be sufficiently large. Then for a fixed $\xi \in \mathbf{R}$*

$$E[e^{i\xi X(T_q)}] - E[e^{i\xi Y(T_q)}] \sim O(q^{-2}) \text{ as } q \to +\infty.$$

Based on Theorem 2 we suggest the following numerical procedure for computation of (4).

Theorem 3. *Let a natural number N be sufficiently large and $q = N/T$. Introduce the following operators:*

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_+^+ u(x) &= E[u(x + \overline{X}^+_{T_{q+r/2}})],\ \mathcal{E}_-^+ u(x) = E[u(x + \overline{X}^-_{T_{q+r}})]; \\ \mathcal{E}_+^- u(x) &= E^x[u(\underline{X}^+_{T_{q+r/2}})],\ \mathcal{E}_-^- u(x) = E^x[u(\underline{X}^-_{T_{q+r}})]. \end{aligned}$$

One may approximate $v_n(q,x)$ in (4) as follows:

$$v_n(q,x) = \frac{\mathbf{1}_{(0,h)}(x)}{(1 + r/q)} \mathcal{E}_-^+ \mathbf{1}_{(0,h)} \mathcal{E}_+^+ \mathcal{E}_-^+ \mathbf{1}_{(0,h)} \mathcal{E}_-^- \mathcal{E}_+^- \mathbf{1}_{(0,h)} \mathcal{E}_+^+ v_{n-1}(q,x) + O(q^{-2}) \text{ as } q \to +\infty.$$

The operators $\mathcal{E}_+^+$, $\mathcal{E}_-^+$, $\mathcal{E}_+^-$ and $\mathcal{E}_-^-$ can be efficiently implemented by using the Fast Fourier Transform (FFT) for real-valued functions (see e.g. [11]).

In the paper, we suggested a new approach for pricing exotic options with a payoff depending on the infimum and supremum of Lévy processes at expiry. The method suggested makes it easy to implement such a sophisticated tool as the Wiener-Hopf factorization for general Lévy models with jumps of unbounded variation.

References

[1] S.I. Boyarchenko, S.Z. Levendorskiǐ, Non-Gaussian Merton-Black-Scholes Theory, World Scientific Publishing Co., 2002.

[2] M. Boyarchenko, S. Levendorskiǐ, Valuation of Continuously Monitored Double Barrier Options and Related Securities, Mathematical Finance 21 (2011).

[3] A. Böttcher, Yu. I. Karlovich, I. M. Spitkovsky, Convolution Operators and Factorization of Almost Periodic Matrix Functions, Operator Theory: Advances and Applications, vol.131, Birkhäuser Verlag, 2002.

[4] R. Cont, P. Tankov, Financial Modelling With Jump Processes, 2nd ed., Chapman & Hall/CRC, 2008.

[5] E. Eberlein Fourier-Based Valuation Methods in Mathematical Finance. In: Benth F., Kholodnyi V., Laurence P. (eds) Quantitative Energy Finance. Springer, 2014.

[6] Hieber, P.: Pricing Exotic Options in a Regime Switching Economy: a Fourier Transform Method, Review of Derivatives Research 21 (2018) 231–252.

[7] A. Itkin, Pricing Derivatives Under Levy Models, Birkhauser, 2017.

[8] J. L. Kirkby, Robust Option Pricing With Characteristic Functions and the B-spline Order of Density Projection, Journal of Computational Finance 21 (2017) 61-100.

[9] O. E. Kudryavtsev, Approximate Wiener–Hopf Factorization and Monte Carlo Methods for Lévy Processes, Theory of Probability & Its Applications 64 (2019) 186–208.

[10] O. Kudryavtsev, A Simple Wiener-Hopf Factorization Approach for Pricing Double-Barrier Options, Springer Proceedings in Mathematics and Statistics 358 (2021) 273–291.

[11] O. Kudryavtsev, S. Levendorskiǐ, Fast and Accurate Pricing of Barrier Options Under Lévy Processes, Finance and Stochastics 13 (2009) 531–562.

[12] C. E. Phelan, D. Marazzina, G. Fusai, G. Germano, Fluctuation Identities with Continuous Monitoring and Their Application to Price Barrier Options, European Journal of Operational Research 271 (2018) 210-223.

Название доклада: Ветвящееся случайное блуждание в случайной среде с гумбелевским потенциалом.

Авторы: Куценко Владимир Александрович (докладчик), Яровая Елена Борисовна.

Рассматривается ветвящееся случайное блуждание (ВСБ) с непрерывным временем на решетке $\mathbb{Z}^d$, $d \in \mathbb{N}$. Пусть в каждом узле решетки $x \in \mathbb{Z}^d$ определен процесс рождения и гибели частиц. Предположим, что частица может делиться надвое или гибнуть. Соответствующие интенсивности заданы неотрицательными случайными величинами $\xi^+(x) = \xi^+(x, \omega)$ и $\xi^-(x) = \xi^-(x, \omega)$, определенными на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Математическое ожидание относительно меры $\mathbb{P}$ обозначим угловыми скобками $\langle \cdot \rangle$. Случайной средой назовем совокупность пар случайных величин $(\xi^+(x), \xi^-(x))$, пары пространственно независимы и одинаково распределены. *Случайный потенциал* в каждой точке $x \in \mathbb{Z}^d$ определим как $V(x) = V(x, \omega) = \xi^+(x) - \xi^-(x)$. Реализацию среды при фиксированном $\omega \in \Omega$ назовем "замороженной". Как в [2] блуждание частиц по решетке описывается простым симметричным случайным блужданием, при котором частица с равной интенсивностью перемещается в одну из соседних точек решетки. Эволюция частиц происходит независимо друга от друга и от всей предыстории.

Модель ВСБ. В момент времени $t = 0$ на решетке находится ровно одна частица в точке $x \in \mathbb{Z}^d$, которая за время $[0, h)$, при $h \to 0$, может: прыгнуть в соседнюю точку y с вероятностью $\frac{\varkappa}{2d}h + o(h)$, произвести одного потомка с вероятностью $\xi^+(x)h + o(h)$; умереть с вероятностью $\xi^-(x)h + o(h)$, или, наконец, выжить без изменений с вероятностью $1 - \varkappa h - (\xi^+(x) + \xi^-(x))h + o(h)$. Состояние системы частиц на $\mathbb{Z}^d$ описывается числом частиц $\mu_{t,\omega}(y)$ в момент времени t в точке $y \in \mathbb{Z}^d$, а также общим числом частиц $\mu_{t,\omega} := \sum_{y \in \mathbb{Z}^d} \mu_{t,\omega}(y)$ на $\mathbb{Z}^d$ при начальных условиях $\mu_{0,\omega}(y) = \delta_y(x)$ и $\mu_{0,\omega} = 1$, соответственно. *"Замороженные"* (quenched) моменты порядка n, см. [2, 3], являются случайными и определяются как $m_n(t,x,y) := m_n(t,x,y,\omega) = \mathbb{E}_x \mu^n_{t,\omega}(y)\,; m_n(t,x) := m_1(t,x,\omega) = \mathbb{E}_x \mu^n_{t,\omega}$. Здесь ω относится к фиксированной («замороженной») реализации случайной среды, а x есть положение начальной частицы при $t = 0$. *"Отожженые"* (annealed) моменты порядка $p \geq 1$ определяются как $\langle m^p_n(t,x,y) \rangle$ и $\langle m^p_n(t,x) \rangle$, соответственно.

Теорема 1. *Пусть $\ln P(V(0) > z) \sim e^{-z}$, $z \to \infty$, тогда в ВСБ для $\langle m^p_n(t,x,y) \rangle$ и $\langle m^p_n(t,x) \rangle$ при $p \geq 1$ и каждых $x \in \mathbb{Z}^d$ и $y \in \mathbb{Z}^d$, $d \in \mathbb{N}$, имеем*

$$\lim_{t \to \infty} \frac{\ln \langle m^p_n \rangle}{pn\, t \ln t} = 1.$$

Доказательство теоремы для $\langle m_1 \rangle$ с двумя типами начальных условий $u_0(x) = m_1(0,x,y) = \delta_y(x)$ или $u_0(x) = m_1(0,x) = 1$ основано на решении задачи Коши

$$\begin{aligned} &\frac{\partial m_1}{\partial t} = \varkappa \Delta m_1 + V(x) m_1, \quad (t,x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{Z}^d \\ &m_1 = u_0(x), \quad x \in \mathbb{Z}^d, \end{aligned} \tag{1}$$

где $\varkappa > 0$ и оператор $\varkappa\Delta : l^q(\mathbb{Z}^d) \to l^q(\mathbb{Z}^d)$, $1 \leq q \leq \infty$, является решетчатым лапласианом [2, 3]. Решение задачи Коши (1) может быть представлено [1, 2, 3] по формуле Фенмана-Каца. При $u_0(x) = 1$ оно примет вид

$$u(t,x,\omega) = \mathbb{E}\left[\exp\left\{\int_0^t V\left(x_s,\omega\right) \mathrm{d}s\right\}\right], \tag{2}$$

где x_s — случайное блуждание с генератором $\varkappa\Delta$, а математическое блуждание $\mathbb{E}_x$ берется относительно траекторий случайного блуждания при условии его старта в точке x. Подходы к оценке этого представления предложены в [1], в которой сформулированы основные качественные результаты о поведении m_1^p и $\langle m_1^p \rangle$, $p \geq 1$. В [2] были даны точные асимптотики для m_n^p и $\langle m_n^p \rangle$, $p \geq 1$, $n \geq 1$, для случайного потенциала $V(0)$ с вейбулловским хвостом распределения. Наконец, для неоднородной случайной среды результаты были обобщены в [3]. Ряд алгоритмов численного моделирования для случайных сред приведен в [4].

Список литературы

[1] *J.Gärtner, S.Molchanov.* Parabolic problems for the Anderson model // Commun. Math. Phys. — 1990. — №132. — P. 613–655.

[2] *S. Albeverio, L. Bogachev, S. Molchanov, E. Yarovaya* Annealed moment Lyapunov exponents for a branching random walk in a homogeneous random branching environment // Universität Bonn. SFB 256. Nichtlineare Partielle Differentialgleichungen . — 2000

[3] *E. Yarovaya* Symmetric Branching Walks in Homogeneous and Non-homogeneous Random Environments // Communications in Statistics - Simulation and Computation. — 2012. — №7. — P. 1232–1249

[4] *V. Kutsenko, E. Yarovaya* Symmetric Branching Random Walks in Random Media: Comparing Theoretical and Numerical Results // Stochastic Models — 2022. — P. 1–20.

О некоторых мартингальных конструкциях для ПСИ-процессов

А.В. Люлинцев
(Россия, Санкт-Петербург; СПбГУ, Матмех)

Пусть $(\xi) = \xi_0, \xi_1, \ldots$ – последовательность случайных величин, $\Pi_\lambda(t)$ – пуассоновский процесс с интенсивностью $\lambda > 0$ и временным параметром $t \in \mathbb{R}_+$. Последовательность (ξ) и Π_λ предполагаются независимыми.

Случайный процесс

$$\psi_\lambda(t) := \xi_{\Pi_\lambda(t)}, \quad t \geqslant 0, \tag{1}$$

называется *ПСИ-процессом*, или *процессом пуассоновского случайного индекса*.

В случае, когда последовательность (ξ) марковская, процесс пуассоновского случайного индекса является процессом псевдопуассоновского типа (см. [4]). Изучены свойства ПСИ-процессов со случайной интенсивностью (см. [2]), спектральные свойства ПСИ-процессов со специальной рандомизацией времени (см. [5]) и некоторые локальные асимптотические свойства последовательностей ПСИ-процессов (см. [3]).

В данном работе рассматривается *интегрированный ПСИ-процесс*:

$$\Psi_\lambda(t) := \int_0^t \psi_\lambda(s)\, ds, \quad t \geqslant 0. \tag{2}$$

На осовании предыдущих результатов (см. [1], [2]) изучены основные свойства интегрированного ПСИ-процесса, в том числе вычислены главные моментные характеристики. В работе [1] были рассмотрены свойства самоподобия для интегрированного ПСИ-процесса со случайной интенсивностью.

Далее, (ξ) – последовательность независимых одинаково распределённых случайных величин. Вводятся фильтрации, естественно порождённые ПСИ-процессом и интегрированным ПСИ-процессом. ПСИ-процесс является марковским процессом относительно фильтрации, порождённой $\mathcal{F}_t^\psi = \{\sigma(\psi_\lambda(s))\}_{s \leqslant t}$, а интегрированный ПСИ-процесс относительно фильтрации, порождённой $\mathcal{F}_t^\Psi = \{\sigma(\Psi_\lambda(s))\}_{s \leqslant t}$, не является марковским.

Рассмотрим двумерный процесс $\big(\psi_\lambda(t), \Psi_\lambda(t)\big)$ (марковская пара) относительно фильтрации, порождённой $\mathcal{F}_t^{\psi,\Psi} = \{\sigma\big(\psi_\lambda(s), \Psi_\lambda(s)\big)\}_{s \leqslant t}$. Данный процесс является марковским относительно введённой фильтрациии $\{\mathcal{F}_t^{\psi,\Psi}\}_{t \geqslant 0}$.

Поставим задачу: построить компенсатор для интегрированного ПСИ-процесса, чтобы относительно естественной фильтрации $\{\mathcal{F}_t^{\psi,\Psi}\}_{t \geqslant 0}$ скомпенсированный процесс уже являлся мартингалом. Ответ получен, результат сформулирован в теореме ниже.

Теорема 1. Пусть (ξ) – последовательность независимых одинаково распределённых случайных величин, $\mathbb{E}\xi_0 = 0$. Пусть фильтрация $\mathbb{F}$ порождена $\mathcal{F}_t^{\psi,\Psi} = \{\sigma\big(\psi_\lambda(s), \Psi_\lambda(s)\big)\}_{s \leqslant t}$. Тогда процесс $\lambda\Psi_\lambda(t) + \psi_\lambda(t)$ при $t \geqslant 0$ является мартингалом относительно $\mathbb{F}$: в силу марковости для $s \leqslant t$

$$\mathbb{E}\big\{\lambda\Psi_\lambda(t) + \psi_\lambda(t) \,|\, \psi_\lambda(s), \Psi_\lambda(s)\big\} = \lambda\Psi_\lambda(s) + \psi_\lambda(s). \tag{5}$$

Благодарности: Работа поддержана грантом РФФИ 20-01-00646 (А).

Литература:

[1] *Rusakov O., Yakubovich Y., Laskin M.* Self-Similarity for Information Flows With a Random Load Free on Distribution: the Long Memory Case. 2018 2nd European Conference on Electrical Engineering and Computer Science (EECS). P. 183-189.
[2] *Русаков О.В.* Псевдо-пуассоновские процессы со стохастической интенсивностью и класс процессов, обобщающих процесс Орнштейна-Уленбека // Вестник СПбГУ. Математика. Механика. Астрономия. 2017. Т.4(62). Вып. 2. С. 247-257.
[3] *Русаков О.В., Якубович Ю.В., Баев Б.А.* О некоторых локальных асимптотических свойствах последовательностей со случайным индексом. // Вестник СПбГУ. Математика. Механика. Астрономия. 2020. Т.7(65). Вып. 3. С. 453-468.
[4] *Феллер В.* Введению в теорию вероятностей и её приложения. Т. I, II. М.: Мир, 1984.
[5] *Якубович Ю.В., Русаков О.В.* О спектральных свойствах стационарных случайных процессов, связанных специальной рандомизацией времени // Записки научных семинаров ПОМИ. Том 501. 2021. С. 315-334.

Вероятностное моделирование сетевой кластеризации

А. Макарова, В. Горлов

г.Воронеж

В рамках решения задачи по разработке алгоритма общей схемы выделения сетевых кластеров, была решена задача, нахождения наиболее эффективного разбиения сети (определение показателя качества разбиения сети).

Рассмотрим множество Φ всех возможных разбиений множества вершин графа V. Разбиение $M \in \Phi$ - разбиение n вершин на m кластеров. Определим для разбиения M некоторое числовое значение $L(M)$ - верхнюю границу длины кодового слова, определяющего качество разбиения M. Пусть теперь $L(M)$ - показатель качества разбиения M.

Определим для сети фиксированное разбиение M на некоторые кластеры, также определим некоторую случайную величину Q, принимающую значения от 1 до m с вероятностями q_i,где $i = 1..m$. Для всех кластеров i сети определим некоторую случайную величину P^i, принимающую значения от 1 до n_i с вероятностями p_i^k, где $k = 1..n_i$.

Расчет показателя качества разбиения $L(M)$ зависит от энтропии определенных выше случайных величин Q и P^i. В результате исследования получаем расширенное понимание показателя качества разбиения $L(M)$:

$$L(M) = \sum_{i=1}^{m} q_i \ln(\sum_{i=1}^{m} q_i) - 2\sum_{i=1}^{m} q_i \ln(q_i) - \sum_{\alpha=1}^{n} p_\alpha \ln(p_\alpha) + \sum_{i=1}^{m}(q_i + \sum_{\alpha\in i} p_\alpha) \ln(q_i + \sum_{\alpha\in i} p_\alpha). \quad (1)$$

Теорема

При использовании алгоритма и формулы (1) вероятность отказов в сети снижается, показатель эффективности растет и "время жизни сети"возрастает в целом.

Заметим, что в формуле (1) слагаемое $\sum_{\alpha=1}^{n} p_\alpha \ln(p_\alpha)$ не зависит от разбиения сети на кластеры. В связи с чем в процессе работы алгоритма с целью нахождения наиболее эффективного разбиения сети, требуется сохранять все полученные изменения: q_i - вероятность случайного перемещения входа и выхода из кластеров, и $\sum_{\alpha=1}^{n} p_\alpha$ - время проводимое в каждом кластере при случайном перемещении.

На базе разработанных алгоритмов и протоколов возможно реализовать усовершенствованную сеть SDN [1,2].

Список литературы

1. *Makarova A. V., Gorlov V. A.* Stochastic analysis in mod-elling and efficiency esti-mation of modern networks, Global and Stochastic Analysis ,Vol. 7 No. 2 (2020), pp. 131-137.

2. *Makarova A. V., Gorlov V. A.* Stochastic analysis methods in SDN networks modelling, Communications on Stochastic Analysiss Vol. 14 No. 1-2 (2020), pp.13-18.

Сохранение энергии при случайном локальном воздействии на большую систему

Меликян М.В.
Тьютор
Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова,
Механико-математический факультет, Кафедра теории вероятностей,
Москва, Россия
E-mail: mv.melikian@gmail.com

Рассматривается конечная система точечных частиц на вещественной прямой $\mathbb{R}$ с координатами $\{x_k(t)\}_{k=1}^N$ и скоростями $\{v_k(t)\}_{k=1}^N$. Массы всех частиц полагаются равными единице. Обозначим $q_k(t) = x_k - kd, \quad p_k(t) = \dot{q}_k(t) = v_k(t)$, где параметр $d > 0$. Зададим полную энергию системы (гамильтониан) формулой:

$$H(q,p) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N} p_k^2 + \frac{1}{2}\sum_{k,j=1}^{N} a(k-j)q_k q_j - q_n f(t),$$

где $f(t)$ — внешнее воздействие, а функция $a(k)$ удовлетворяет двум условиям:

1. симметрия: $a(k) = a(-k)$ (т.е. система гамильтонова);
2. матрица V положительно определена, где $V_{k,j} = a(k-j) = a(j-k)$.

Ввиду положительной определенности можем обозначить собственные значения матрицы V через $s_k = \nu_k^2, k = 1, ..., N$, причем все ν_k будем считать положительными. Соответствующую им ортонормированную систему собственных векторов обозначим через $\{u_k, k = 1, ..., N\}$.

Заметим, что положением равновесия системы в отсутствие внешнего воздействия (состояние, где достигается минимум энергии) будет

$$x_k = kd, \quad v_k = 0, \quad k = 1, ..., N.$$

Это означает, что если начальные условия находятся в этом положении, то частицы не будут двигаться, т.е. будем иметь $x_k(t) = kd, \ v_k(t) = 0$ для всех $t \geqslant 0$.

Мы будем рассматривать нулевые начальные условия

$$q_k(0) = 0, \ p_k(0) = 0, \ k = 1, ..., N. \tag{1}$$

Таким образом, движение системы описывается следующей системой ОДУ:

$$\ddot{q}_j = -\sum_k a(k-j)q_k + f(t)\delta_{j,n}, \ j = 1, ..., N,$$

где $f(t)$ – внешняя сила, действующая на частицу с номером n, $\delta_{j,n}$ – символ Кронекера. Перепишем в гамильтоновом виде:

$$\begin{cases} \dot{q_j} = p_j, \\ \dot{p_j} = -\sum_k a(k-j)q_k + f(t)\delta_{j,n}. \end{cases} \tag{2}$$

Пусть $f(t)$ – внешняя сила, действующая на частицу с номером n, – стационарный в широком смысле центрированный случайный процесс с непрерывной ковариационной функцией $B(s)$ и спектральной мерой $\mu(dx)$.

Будем говорить, что последовательности случайных процессов $\{q_k(t)\}_k$, $\{p_k(t)\}_k$ решают систему уравнений (2), если они непрерывно дифференцируемы в среднеквадратичном и при их подстановке правая и левая часть равны по соответствующей мере. Начальные условия, лежащие в соответствующем гильбертовом пространстве, гарантируют существование и единственность решений уравнения, принадлежащему этому пространству при каждом t.

Введем вектор $\psi(t) = \begin{pmatrix} q(t) \\ p(t) \end{pmatrix}$ и обозначим:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & E \\ -V & 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда система перепишется в виде:

$$\dot{\psi} = A\psi + f(t)g,\ g = (0, e_n)^T,\ e_n(j) = \delta_{j,n}. \tag{3}$$

Теорема 1. *Для любого $\psi \in \mathbb{R}^{2N}$ существует и единственно (п.н.) решение $\psi(t)$ системы (3) с начальным условием ψ.*

Доказательство. Очевидно следует из существования и единственности решения неоднородной линейной системы дифференциальных уравнений первого порядка, см., например, [1].

Теорема 2. *Пусть мера μ такова, что ковариационную функцию рассматриваемого случайного процесса можно представить в виде $B(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{itx} b(x)dx$. Тогда*

1. *если носитель $b(x)$ не пересекается с множеством $\{\nu_k, k = 1, ..., N\}$, то средняя энергия всей системы будет ограничена по времени;*

2. *если для всех j, таких что ν_j лежит в $supp\, b(x)$, $(u_j, e_n)^2 = 0$, то вновь имеет место ограниченность по времени средней энергии;*

3. *если есть точка спектра ν_j, лежащая в $supp\, b(x)$, такая что $(u_j, e_n)^2 \neq 0$, то*

3.1. *если $\nu_j = 0$ и выполнено*

$$b(0) = b'(0) = 0, \tag{4}$$

то средняя энергия всей системы будет ограничена по времени;

3.2. *иначе (т.е. для тех индексов $j \in \{1, ..., N\}$, для которых либо $\nu_j \neq 0$, либо $\nu_j = 0$, но не выполнено (4)) средняя энергия будет расти по времени, причем существует положительная постоянная C, такая что $E(H(t)) \sim Ct^2$.*

Список литературы

1) Филиппов А.Ф., Введение в теорию дифференциальных уравнений // КомКнига, Москва, 2007.

2) Лыков А.А., Малышев В.А., Меликян М.В. Резонанс в многокомпонентных линейных системах // Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика. 2021. № 3. с. 74-79.

3) Lykov A., Malyshev V., Melikian M., Zamyatin A., Resonances in Large Finite Particle Systems // Springer Proceedings in Mathematics Statistics, серия Shiryaev A.N., Samouylov K.E., Kozyrev D.V. (eds) Recent Developments in Stochastic Methods and Applications. ICSM-5 2020, издательство Springer International Publishing AG (Cham, Switzerland), том 371, 2021, pp. 120-130.

4) Lykov A.A., Malyshev V.A. Harmonic Chain with Weak Dissipation // Markov Processes and Related Fields 18. № 4. 2012. pp. 721-729.

Применение порядковых статистик в построении одношаговых прогнозов поведения финансовых индексов

В.В. Мисюра[1], Е.В. Мисюра[2]
[1]Донской государственный технический университет, Ростов-на-Дону
[2]Российский экономический университет имени Г.В. Плеханова, Москва

Существует большое количество методов и способов получения точечных и интервальных прогнозов финансовых индексов, в которых используются математические модели случайного процесса и статистические оценки параметров модели, с помощью которых модель настраивается на конкретную реализацию. Однако, отсутствие стационарности в развитии таких процессов, наличие избыточной или необъясняемой волатильности, выбросов, тяжелых хвостов, кластеризации волатильности, не позволяют найти оценки параметров модели, обладающих хорошими свойствами статистических оценок. Такие модели, в которых параметры недостаточно хорошо определены, называют моделями с неопределенными параметрами.

Работа посвящена анализу временных рядов с целью предсказания их развития во времени. Предлагается метод получения одношагового интервального прогноза временного ряда основанный на конструировании наборов предиктивных и целевых переменных с помощью робастных статистик. Основная идея предложенного в статье метода заключается в том, что левую границу одношагового интервального прогноза временного ряда $h_k, \quad k=1,...,N$ формируют k первых наименьших порядковых статистик, соответственно правую границу – порядковые статистики от $k+1$ до N, взятые с весами, для нахождения которых применяется квантильная регрессия.

Рассмотрим временной ряд $h_k, \quad k=1,...,N$ как реализацию случайного процесса $\{X_k, 0 \le k \le N\}$. Пусть некоторое четное число $1<\tau<N$ определяет ширину окна процедуры сдвига временного ряда $h_k, \quad k=1,...,N$. Преобразуем одномерный ряд h_k в два многомерных набора данных по следующему алгоритму.

1. Получаем случайные последовательности при сдвиге h_k по i на один шаг и упорядочиваем их элементы по возрастанию $(h)_i^{i+\tau-1}=\{h_i, \quad h_{i+1}\dots h_{i+\tau-1}\}, \quad i=1,...,N-\tau+1$ Преобразуем последовательности $(h)_i^{i+\tau-1}$ в вектор-столбцы $H^{(1)},H^{(2)}...,H^{(n)}\in R^\tau$, где $n=N-\tau+1$.
2. Получаем матрицу

$$H=\begin{pmatrix} h_1^{(1)} & h_2^{(2)} & \cdots & h_n^{(n)} \\ h_2^{(1)} & h_3^{(2)} & \cdots & h_{n+1}^{(n)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_\tau^{(1)} & h_{\tau+1}^{(2)} & \cdots & h_N^{(n)} \end{pmatrix},$$

где $h_l^{(j)}$ порядковая статистика с рангом l в упорядоченном наборе полученном из элементов последовательности $(h)_i^{i+\tau-1} = \{h_i,\quad h_{i+1}\ldots h_{i+\tau-1}\}$, $i=1,...,N-\tau+1$ на j итерации.

3. Транспонируем матрицу H и наименьшие элементы каждой строки переносим в матрицу $G(N-\tau+1\times(\tau/2+1))$, наибольшие - в матрицу $U(N-\tau+1\times(\tau/2+1))$, первый столбец матриц представляет собой вектор-столбец, состоящий из 1:

$$G=\begin{pmatrix} 1 & h_1^{(1)} & h_2^{(1)} & \cdots & h_{\tau/2}^{(1)} \\ 1 & h_2^{(2)} & h_3^{(2)} & \cdots & h_{\tau/2+1}^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & h_n^{(n)} & h_{n+1}^{(n)} & \cdots & h_{\tau/2+n-1}^{(n)} \end{pmatrix},\ U=\begin{pmatrix} 1 & h_{\tau/2+1}^{(1)} & h_{\tau/2+2}^{(1)} & \cdots & h_{\tau}^{(1)} \\ 1 & h_{\tau/2+2}^{(2)} & h_{\tau/2+3}^{(2)} & \cdots & h_{\tau+1}^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & h_{\tau/2+n}^{(n)} & h_{\tau/2+n+1}^{(n)} & \cdots & h_N^{(n)} \end{pmatrix},\ n=N-\tau+1. \quad (1)$$

Таким образом мы получаем две матрицы или два набора данных предикторных переменных, на основе которых построим квантильные регрессионные модели для вычисления правой и левой границ интервального прогноза.

В качестве целевых переменных будут выступать нижняя и верхняя эмпирические границы, полученные как линейные комбинации $\{h_i,\quad h_{i+1}\ldots h_{i+\tau-1}\}$, $i=1,...,N-\tau+1$, т.е. $\theta_-^i=\varphi(h_i,\quad h_{i+1}\ldots h_{i+\tau-1}),\ \theta_+^i=\varphi(h_i,\quad h_{i+1}\ldots h_{i+\tau-1}),\quad i=1,...,N-\tau+1$.

Перейдем к вопросу определения целевых переменных (θ_-^i,θ_+^i). Целевые переменные предлагается вычислять как границы доверительного интервала порядковой статистики случайной последовательности $(h)_i^{i+\tau-1} = \{h_i,\quad h_{i+1}\ldots h_{i+\tau-1}\}$. Обоснованием такого выбора является приведенная ниже теорема.

Рассмотрим общий случай. Пусть $\{H_{(1)},\quad H_{(2)}\ldots H_{(\tau)}\}$ – порядковые статистики для выборки $\{H_1,\quad H_2\ldots H_\tau\}$. Обозначим квантиль уровня p через $h_p=F^{-1}(p), 0<p<1$, где $F_H(h)$ - неизвестная функция распределения наблюдаемой случайной величины. Справедлива следующая теорема.

Теорема. Пусть два числа r и s такие что, $P(H_{(r)}<h_p<H_{(s)})=1-2\alpha$ заданная доверительная вероятность и интервал $(H_{(r)},\quad H_{(s)})$ со случайными границами $H_{(r)}$ и $H_{(s)}$ включает неизвестный квантиль $h_p=F^{-1}(p), 0<p<1$. Тогда вероятность $P(H_{(r)}<h_p<H_{(s)})$ не зависит от неизвестной функции распределения $F_H(h)$.

Выберем в качестве порядковой статистики для $(h)_i^{i+\tau-1} = \{h_i,\quad h_{i+1}\ldots h_{i+\tau-1}\}$ медиану. Тогда в качестве интервальной оценки для $Me(h)_i^{i+\tau-1}$ можно выбрать двумерную статистику вида $(h_l,\quad h_k),\quad i\le l<k\le i+\tau-1, i=1,...,N-\tau+1$, определяющую симметричный интервал с уровнем доверия $1-2\alpha$, полагая $k=\tau-l-1+i$.

Поскольку $P(h_l < Me(h)_i^{i+\tau-1} < h_k) = (1/2)^{\tau} \sum_{t=l}^{\tau-l} C_{\tau}^{t} = 1-2\alpha$ значение *l*, используя теорему Муавра-Лапласа, можно рассчитать по формуле

$$l = \left[0{,}5\left\{\tau + 1 - \sqrt{\tau}\Psi(1-\alpha)\right\} + 1\right] + i,\ i = 1,\dots,N-\tau+1, \qquad (2)$$

где $[v]$ – целая часть числа v, $\Psi = \Phi^{-1}(u)$.

Итак, будем полагать в дальнейшем, что мы располагаем результатами регистрации значений предикторных переменных $(g_1,\ \ g_2 \dots g_{\tau/2})$ и $(u_1,\ \ u_2 \dots u_{\tau/2})$ представленных в вектор-столбцах матриц $G(N-\tau+1\times(\tau/2+1))$ и $U(N-\tau+1\times(\tau/2+1))$ (см. (1)), а так же векторами целевых переменных $\theta_- = (\theta_-^i)^T$ и $\theta_+ = (\theta_+^i)^T$.

Построим квантильные регрессий с линейной функцией зависимости, т.е. предполагаем, что условные квантили определяются соотношениями:

$$Quant_{\alpha}(\theta_- \mid G\ ) = a_0 + a_1 g_1 + a_2 g_2 + \dots + a_{\tau/2} g_{\tau/2} + v_{\alpha}, \qquad (3)$$

$$\theta_- = \hat{a}_0 + \hat{a}_1 g_1 + \hat{a}_2 g_2 + \dots + \hat{a}_{\tau/2} g_{\tau/2} + \hat{v}_{\alpha}$$

$$Quant_{1-2\alpha}(\theta_+ \mid U_N) = b_0 + b_1 u_1 + b_2 u_2 + \dots + b_{\tau/2} u_{\tau/2} + v_{1-2\alpha}. \qquad (4)$$

$$\theta_+ = \hat{b}_0 + \hat{b}_1 u_1 + \hat{b}_2 u_2 + \dots + \hat{b}_{\tau/2} u_{\tau/2} + \hat{v}_{1-2\alpha}$$

Приведем метод оценки параметров модели (3), который также применим без дополнительных условий к модели (4).

Оценка параметров модели (3) определяется из соотношения

$$\hat{a}_0 = \underset{a \in R^{\tau/2+1}}{\arg\min} \sum_{i:\theta_- \ge \hat{\theta}_-} \alpha |v_i| + \sum_{i:\theta_- < \hat{\theta}_-} (1-\alpha)|v_i| \qquad (5)$$

Линейная модель (5) была представлена Коенкером и Бассетом [1], как обобщение простой квантили.

Задача (5) сводится к линейному программированию. Перепишем задачу (5) в виде

$$\hat{a}_0 = \underset{a \in R^{\tau/2+1}}{\arg\min} \sum_i \alpha (v_i)_+ + (1-\alpha)(v_i)_-, \qquad (6)$$

где $(\cdot)_+$ и $(\cdot)_-$ — положительная и отрицательная части числа, соответственно. Тогда положив $r = r^+ - r^-$, где r^+, r^- – положительная и отрицательная части вектора r, получаем задачу линейного программирования

$$\begin{cases} \alpha e^T r^+ + (1-\alpha) e^T r^- \to \min \\ G^T a + r^+ - r^- = \theta_- \\ (a, r+, r-) \in R^{\tau/2+1} \times R^{2(N-\tau+1)} \end{cases} \qquad (7)$$

где e = $(1, 1, \ldots, 1)^T$. Очевидно, что r^+_i и r^-_i не могут иметь ненулевые значения одновременно, поэтому задачи (5) и (7) эквивалентны. На выходе мы получаем решение (a, r^+, r^-), из которого нам нужен вектор a.

Литература

[1] Koenker, R. Quantile regression / R. Koenker, J. Gilbert Bassett // Econometrics. — 1978. — Vol. 46, no. 1. — Pp. 33–50.

Переварюха А. Ю. (Санкт–Петербург, Россия) **Моделирование популяционной инвазии в уравнении со стохастически возмущенным запаздыванием.**

В предыдущей работе [1] мы предложили модель сценария деградации промысловой популяции рыб со стохастическим возмущением после выхода популяции и интервала Ω_s стабильного восполнения. Модель (1) сочетает стохастическое и детерминированное поведения в двух диапазонах, не имеющих гладкой границы. Выживаемость поколений $R = N(T)$ от $N(0) = \lambda S, S \in \Omega_S$ на интервале $t \in [0, \dots \xi, \omega \dots, T]$ описана уравнением:

$$\frac{dN}{dt} = -(\alpha \bar{w}(\xi) N(t) + \bar{\Theta}(N(0))\beta)\, N(t), 0 < t < T. \qquad (1)$$

α, β — коэффициенты убыли? соотнесенные с динамикой роста $w(\xi)$. $\Theta(N(0)) = [1 + \exp\left(-\kappa N(0)^2\right)] \times \gamma, \lim_{N(0)\to\infty} \Theta(N(0)) = 1$ пороговое снижение эффективности воспроизводства в $S < \mathcal{L} \in \mathbb{N}$, где $\gamma \in (0, 1]$ — равномерно распределенная случайная величина. Так мы получили область малочисленной группы $\mathcal{L} \subset U_1 \in \Omega_S$, где воспроизводство обусловлено случайными факторами. Полученная на основе унимодальной зависимости $\psi(x) = \bigcup_{N(0)} N(T), N(0) \in \mathbb{Z}^+$ численных решений (1) на интервале $t \in [0, T]$ траектория итераций $x_{n+1} = \psi(x_n), x_0 < \mathcal{L}$ обладает свойством ограниченного стохастического возмущения, имитирующего действие среды на истощенную промыслом популяцию.

При анализе стремительных биологических инвазий и инфекций актуален сценарий, когда достигнутая численность $N(t) \to \mathfrak{K}$ не будет устойчивой. Стохастическое воздействие значимо в активации противоборства в состоянии высокой численности — близкой к критической для среды. При приближении к порогу начала разрушения среды наблюдается усиление противодействия, что типично для иммунного ответа организма. Время активации важно для итогового состояния, но не может быть менее τ_1. Пусть время активации варьируется случайной величиной γ в ограниченном диапазоне. Используем уравнение с возмущенным случайной величиной запаздыванием $(t - \tau_1\gamma)$:

$$\frac{dN}{dt} = rN(t) \ln\left(\frac{\mathfrak{K}}{N(t - \tau\gamma)}\right) - \frac{\delta N^2(t - \tau_1\gamma)}{\left(J - N(t)\right)^2} - qN(t), \delta > q, \gamma(\omega) \in [1, 2]. \qquad (2)$$

При приближении $N(t)$ к пороговому значению численности $J, N(0) < J < \mathfrak{K}$ развивается переход в глубокий популяционный кризис $N(t) \to 0 + \epsilon$. Сценарий преодоление популяцией кризиса с образованием колебаний $N(t) \to N_*(t), \max N_*(t) < J$ зависит от стохастических факторов. Можно показать, что подобная популяция гарантированно погибает при увеличении репродуктивного потенциала r. Теорема 1. Существует $r = \bar{r}$, что вероятность $P > 0$ для события $\lim_{t\to\bar{t}} N(t; \bar{r}\tau) = 0$ и при $r > \bar{r}$ реализуется для данного события $\lim_{t\to\infty} P = 1$. Модель (2) описывает сценарий противодействие иммунной системы развитию инфекции, которая способна превращаться в колеблющуюся хроническую при $N(t) << J$. Иммунный ответ имеет не полностью предопределенный характер из-за недетерминированной длительности этапов иммунной активации. Варьируются время презентации антигена и продолжительность подбора подходящих наивных лимфоцитов, так одни организмы справляются с инфекцией быстрее других.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Переварюха А.Ю.* "Моделирование коллапса промысловой популяции при стохастической неопределенности Теор. вероятности и её применения, 2017, Т. 62, Вып. 4, 820–821.

О рандомизации статистик, приводящей к лучшей точности их приближений

Пучкин Никита Андреевич[1], **Ульянов Владимир Васильевич**[2]

[1] Национальный исследовательский университет “Высшая школа экономики”, Институт проблем передачи информации РАН, e-mail: npuchkin@hse.ru

[2] МГУ имени М.В.Ломоносова, e-mail: vulyanov@cs.msu.ru

Пусть имеются наблюдения $\boldsymbol{Y} = (Y_1, \ldots, Y_r)$, представляющие из себя реализацию r-мерного случайного вектора с мультиномиальным распределением $\mathrm{Mult}(n, \boldsymbol{p_Y})$. Одной из фундаментальных задач математической статистики является проверка простой гипотезы $H_0 : \boldsymbol{p_Y} = \boldsymbol{p}$, где $\boldsymbol{p} = (p_1, \ldots, p_r)$ – некоторый фиксированный вектор с неотрицательными компонентами, дающими в сумме 1. Предложен новый способ построения тестовой статистики, основанный на введении дополнительной рандомизации. Пусть $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \ldots, \theta_n)$ – случайный вектор с равномерным распределением на единичной сфере в $\mathbb{R}^n$. Представим вектор наблюдений в виде $\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{\eta}_1 + \boldsymbol{\eta}_2 + \cdots + \boldsymbol{\eta}_n$, где $\boldsymbol{\eta}_1, \ldots, \boldsymbol{\eta}_n$ — независимые одинаково распределенные случайные векторы с распределением $\mathrm{Mult}(1, \boldsymbol{p_Y})$. Вычислим $\boldsymbol{X^\theta} = \sum\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} \theta_i (\boldsymbol{\eta}_i - \boldsymbol{p})$. Предложенная статистика имеет вид

$$\mathcal{T}_\phi = \frac{2n}{\phi''(1)} \sum_{j=1}^{r} p_j \phi\left(1 + \frac{X_j^{\boldsymbol{\theta}}}{\sqrt{n} p_j}\right).$$

где $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ – выпуклая функция, удовлетворяющая условию

$$\phi(1) = \phi'(1) = 0, \quad \phi''(1) > 0.$$

Рандомизированная статистика $\mathcal{T}_\phi$ обладает лучшими асимптотическими свойствами по сравнению, например, с широко известными статистиками Пирсона [1] и Кресси-Рида [2]. В частности, доказано, что для любого $\delta \in (0,1)$ с вероятностью не менее $(1 - \delta)$ расстояние Колмогорова между условным распределением $(\mathcal{T}_\phi \,|\, \boldsymbol{\theta})$ и $\chi^2(r-1)$ убывает как $O((\log^4 n + \log^2(1/\delta))/n)$.

Работа Н. Пучкина выполнена при частичной финансовой поддержке конкурса “Молодая математика России”.

Список литературы

[1] Pearson K. On the Criterion that a Given System of Deviations from the Probable in the Case of a Correlated System of Variables Is Such That It Can Be Reasonably Supposed to Have Arisen from Random Sampling // The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science. 1900. Vol. 50, pp. 157–175.

[2] Cressie N., Read T. Multinomial Goodness-of-Fit Tests // Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological). 1984. Vol. 46, pp. 440–464.

Амбит, траловые и ПСИ стохастические процессы

Олег Витальевич Русаков, Юрий Владимирович Якубович
Санкт-Петербургский государственный университет, мат-мех

Положим, что все рассматриваемые случайные объекты заданы на вероятностном пространстве $\{\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}\}$. Рассмотрим триплет $\{(\xi), \Pi(t), \lambda\}$, состоящий из независимых элементов: $(\xi) = \xi_0, \xi_1, \ldots$ — последовательность случайных величин; $\Pi(t)$, $t \geq 0$, — стандартный пуассоновский процесс с единичной интенсивностью; λ — неотрицательная (п.н.) случайная величина, которая будет играть роль случайной интенсивности.

Определение 1. *Рассмотрим следующую рандомизацию времени последовательности* (ξ)

$$\psi(t) = \psi_\lambda(t) \stackrel{\triangle}{=} \xi_{\Pi(\lambda t)}, \qquad t \in \mathbb{R}_+ . \tag{1}$$

Полученный процесс ψ назовем процессом Пуассоновского случайного индекса (процессом ПСИ, или ПСИ-процессом для кратости). Последовательность (ξ) мы назовем «подчиненной», а независимый от нее процесс $\Pi(\lambda t)$ — «управляющим», или «ведущим».

Заметим, что если подчиненная последовательность (ξ) стационарна, то ПСИ-процесс ψ тоже стационарен. В данной работе мы ограничимся случаем, когда подчиненная последовательность (ξ) состоит из независимых одинаково распределенных членов, что, в частности, даст стационарность соответствующего ПСИ-процесс ψ. Отметим, что при этом предположении о последовательности (ξ) ПСИ-процесс ψ не будет иметь независимых приращений.

Лемма 1. *Допустим, что элементы подчиненной последовательности (ξ) независимы одинаково распределены, имеют $\mathbf{E}\xi_0 = 0$, $\mathbf{D}\xi_0 = 1$. Тогда для всяких неотрицательных t, v ковариация процесса ψ_λ есть преобразование Лапласа для случайной интенсивности λ,*

$$\operatorname{cov}\left(\psi(v), \psi(v+t)\right) = \mathbf{E}\exp\{-\lambda(\omega)t\} \stackrel{\triangle}{=} L_\lambda(t) . \tag{2}$$

Детали доказательства Леммы 1 см. в [1].

Пусть выполнены условия Леммы 1. Рассмотрим независимые копии ПСИ-процесса ψ: $\psi_1, \psi_2, \ldots$ (предполагается, что все соответствующие триплеты $\{(\xi)_j, \Pi_j(t), \lambda_j\}_{j\in\mathbf{N}}$ совокупно независимы). Образуем нормированные суммы

$$Z_N(t) \stackrel{\triangle}{=} \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j=1}^{N} \psi_j(t), \qquad t \in \mathbb{R}_+ . \tag{3}$$

Теорема 1. *При $N \to \infty$ последовательность $Z_N(t)$ сходится в смысле слабой сходимости конечномерных распределений к центрированной гауссовской стационарной случайной функции $Z(t)$, $t \geq 0$, имеющей ковариацию $L_\lambda(t)$.*

В случае, когда интенсивность $\lambda > 0$ является константой, имеет место функциональная предельная теорема.

Теорема 2. *При $N \to \infty$ последовательность $Z_N(t)$ сходится в пространстве Скорохода непрерывных справа, имеющих конечные пределы слева функций, заданных на компакте $[0, T] \ni t$, к процессу Орнштейна-Уленбека (стационарному, гауссовскому, марковскому) с ковариацией* $\exp\{-\lambda t\}$.

Доказательство Теоремы 1 напрямую следует из ЦПТ для векторов. Доказательство Теоремы 2 приведено в [2].

Для описания пределов нормированных сумм независимых одинаково распределенных ПСИ-процессов, их пределов в схеме серий и/или их пределов в смысле нормированных сумм нам потребуется понятие «амбит множества», «амбит» процесса и частного случая «тралового» (*trawl*) процесса. Одна из причин такой необходимости заключается в том, что для адекватного описания поведения стохастического процесса приходится добавлять еще одно измерение. Понятие «амбит» восходит к латинскому *ambitus*, что означает граница, ограниченность, сфера влияния. Суть амбит идеологии стохастической модели заключается в том, что значение случайного элемента в точке (x,t) пространства времени определяется только так называемым «амбит-множеством» $A_t(x)$, которое содержит точку (x,t). С деталями можно подробно ознакомиться в [3]. Для описания тралового процесса нам потребуется ключевое определение базиса Леви ([3] Def 25, p.155).

Определение 2. *Базис Леви $\mathcal{L}$, заданный на $S \subseteq \mathbb{R}^k$, $k \in \mathbb{N}$, есть стохастическая мера (возможно со знаком) с независимыми приращениями (independently scattered), заданная на ограниченных борелевских множествах $\mathcal{B}_b(S)$, имеющая безгранично делимое распределение на каждом $A \in \mathcal{B}_b(S)$, обладающая следующими тремя свойствами.*

1. Для любой последовательности попарно непересекающихся множеств $A_1, A_2, \dots$ из $\mathcal{B}_b(S)$, таких что $\cup_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathcal{B}_b(S)$ выполнено п.н.

$$\mathcal{L}(A_1) + \mathcal{L}(A_2) + \dots = \mathcal{L}\left(\cup_{j=1}^{\infty} A_j\right)\,, \tag{4}$$

где предел в правой части равенства (4) понимается в смысле п.н.

2. Для любой последовательности попарно непересекающихся множеств $A_1, A_2, \dots$ из $\mathcal{B}_b(S)$ соответствующие случайные величины $\mathcal{L}(A_1), \mathcal{L}(A_2), \dots$ независимы.

3. Для каждого $A \in \mathcal{B}_b(S)$ распределение $\mathcal{L}(A)$ принадлежит классу безгранично делимых распределений.

В случае, когда структурная мера (*control measure*, — e.g. Def.32, [3], p.162) для $\mathbb{R}_+$-значного базиса Леви $\mathcal{L}$ есть мера Лебега в определении 2 базиса Леви множество $\mathcal{B}_b(S)$ можно заменить на множество $\mathcal{B}_{Leb}(S)$ — борелевских множеств S, имеющих конечную меру Лебега. Коль скоро значения $\mathcal{L}(A)$, $A \in \mathcal{B}_b(S)$, имеют безгранично делимое распределение, то выписывается формула Леви-Хинчина для кумулянты (см.[3], Утверждение 30 стр.161). Далее там же на стр.162 утверждается, что формула для кумулянты не изменится, если взять $A \in \mathcal{B}_{Leb}(S)$. Это дает возможность определять базис Леви в данном случае. Для ряда неограниченных множеств $A \in \mathcal{B}_{Leb}(S)$ детали приводятся в [4]. Там же (т.е. в [4]), видимо, впервые появился термин «амбит-множество». Обсуждение такой замены (в определении базиса Леви) $\mathcal{B}_b(S)$ на $\mathcal{B}_{Leb}(S)$ см. в [3], стр.156.

Определение 3. Траловый процесс. *Пусть $S = \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$, где первый сомножитель прямого произведения трактуется как пространство (размерности d), а второй — как время. Путь $\mathcal{L}$ есть $\mathbb{R}_+$-значный однородный базис Леви, определяемый структурной мерой Лебега. Под однородностью базиса Леви мы понимаем, что распределение $\mathcal{L}(C)$ не зависит от сдвига множества $C \in \mathcal{B}_{Leb}$ в S. Пусть $A = A(0) \subset \mathbb{R}^d \times (-\infty, 0]$ — «начальное амбит-множество», имеющее конечную меру Лебега, называемое «тралом» (trawl). Рассмотрим монотонное семейство сдвигов вдоль оси времени, задаваемое отрезками (с открытыми концами) вида $(\mathbf{0}, t) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$ и положим $A(t) = A(0) + (\mathbf{0}, t)$. Семейство $(A(t))$ образует «монотонный поток амбит-множеств». Определим траловый процесс:*

$$Y(t) \stackrel{\triangle}{=} \mathcal{L}(A(t))\,. \tag{5}$$

В (5) мы по умолчанию будем предполагать, что $t \geq 0$. В то же время очевидна стационарность тралового процесса $Y(t)$, поэтому мы при необходимости всегда можем положить $t \in \mathbb{R}$. Индикаторные функции для семейства $(A(t))$ назовем «скользящим ядром для тралового процесса».

В дальнейшем будем полагать, что $d = 1$. Рассмотрим «специальные амбит-множества» вида

$$A_\eta(t) \stackrel{\triangle}{=} \{(x,s) : s \le t,\ 0 \le x \le \eta(s-t)\}\,, \quad t \ge 0\,, \tag{6}$$

где η — неубывающая непрерывная положительная функция, заданная на левой полуоси. Рассмотрим соответствующий траловый процесс $Y_\eta(t) \stackrel{\triangle}{=} \mathcal{L}(A(t))$, $t \ge 0$.

Теорема 3. *Рассмотрим последовательность $(\xi_0(N))_{N\in\mathbb{N}}$ — начальные члены тотально независимых одинаково распределенных ПСИ-процессов $(\psi_N(t))_{N\in\mathbb{N}}$, $t \ge 0$. Пусть независимые ведущие процессы имеют случайные независимые одинаково распределенные интенсивности, распределения которых заданы положительной (п.н.) случайной величиной λ. Допустим, что: 1) распределение $\xi_0(1)$ принадлежит области притяжения некоторого α-устойчивого закона, либо 2) $\xi_0(1)$ имеет безгранично делимый закона отличный от α-устойчивого. Тогда в случае 1) подходящим образом нормированные суммы ПСИ-процессов сходятся в смысле слабой сходимости конечно-мерных распределений к траловому процессу $Y_\eta(t)$ с базисом Леви, имеющим заданное распределение α-устойчивого закона; в случае 2) следует рассмотреть схему серий (независимых одинаково распределенных ПСИ-процессов), дающую слабый предел начального значения $\xi_0(1)$, и тогда соответствующий предел (в смысле сходимости конечно-мерных распределений) ПСИ-процессов будет $Y_\eta(t)$ с базисом Леви, имеющим исходный безгранично-делимый закон распределения.*

При этом, как для случая 1), так и для случая 2) наша функция $\eta(s) = \mathrm{d}(1 - L_\lambda(-s))/\mathrm{d}s$, где L_λ — преобразование Лапласа случайной интенсивности λ.

Доказательство Теоремы 3 основывается на детальной работе с кумулянтами и представлением Леви-Хинчина.

Замечание 1. *Пусть $\lambda > 0$ — неслучайна. Тогда мы в Теореме 3 имеем в качестве предела обобщение процесса Орнштейна-Уленбека на случай безгранично-делимого распределения. Данное обобщение отличается от авто-регрессионой схемы, оно введено в 2005 году в [5] и названо «верхнелестничным представлением процесса Орнштейна-Уленбека» (Upstairs representation of the Ornstein-Uhlenbek process). Забавно, что автор работы [4], где он ввел понятие «тралового процесса» в 2011 году, в книге [3] пишет, что он тогда, т.е. в 2011 году, не знал о работе [5] 2005-го года.*

Замечание 2. *Функция η имеет вид экспоненты тогда и только тогда, когда $\lambda > 0$ — неслучайна. Более того, функция η является плотностью распределения величины $-\zeta$, где ζ показательно распределена с интенсивностью $\lambda > 0$. Траловый процесс $Y_\eta(t)$ марковский только в этом случае и только для гаусского, либо пуассоновского базиса Леви на $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.*

Благодарности. Работа поддержана грантом РФФИ 20-01-00646 (А).

Литература.

[1] О.В. Русаков *Псевдо-пуассоновские процессы со стохастической интенсивностью и класс процессов, обобщающих процесс Орнштейна–Уленбека // Вестн. С.-Петерб. ун-та.* Сер. 1. Т. 4(62). Вып. 2, С. 247–257, 2017.

[2] О.В. Русаков *Относительная компактность сумм независимых одинаково распределенных псевдопуассоновских процессов в пространстве Скорохода. Зап. научн. сем. ПОМИ.* Том 442, 122–132, 2015.

[3] O.E. Barndorff-Nielsen, F.E. Benth, and A.E.D. Veraart *Ambit Stochastics* Springer, New York, Probability Theory and Stochastic Modelling Volume 88, 2018, 402p. https://doi.org/10.1007/978-3-319-94129-5

[4] O. E. Barndorff-Nielsen *Stationary infinitely divisible processes // Brazilian Journal of Probability and Statistics* 25, 294–322, 2011.

[5] R. L. Wolpert, M. S. Taqqu *Fractional Ornstein-Uhlenbeck Lévy Processes and the Telecom Process: Upstairs and Downstairs // Signal Processing* Vol. 85(8), 1523–1545, 2005.

Банаховы пределы и приложения

Е. М. Семенов (Воронеж)

Через ℓ_∞ обозначается пространство ограниченных последовательностей $x = (x_1, x_2, \ldots)$ с нормой

$$\|x\|_\infty = \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n|$$

и обычной полуупорядоченностью. Линейный функционал $B \in \ell_\infty^*$ называется банаховым пределом, если

1. $B \geqslant 0$, т. е. $Bx \geqslant 0$ для всех $x \geqslant 0$,
2. $B\mathbb{1} = 1$, где $\mathbb{1} = (1, 1, \ldots)$,
3. $Bx = BTx$ для всех $x \in \ell_\infty$, где T – оператор сдвига, т. е. $T(x_1, x_2, \ldots) = (x_2, x_3, \ldots)$.

Существование банаховых пределов было анонсировано в статье Мазура (1929 г.), а доказательство приведено в книге Банаха. Множество банаховых пределов, которое мы обозначаем через $\mathfrak{B}$, есть замкнутое выпуклое множество на единичной сфере пространства ℓ_∞^*. Эберлейн доказал существование банаховых пределов, инвариантных относительно регулярных преобразований Хаусдорфа. Обозначим через Γ множество линейных операторов в ℓ_∞ таких, что

1. $H \geqslant 0$ и $H\mathbb{1} = \mathbb{1}$;
2. $Hc_0 \subset c_0$;
3. $\limsup\limits_{j \to \infty} (A(I - T)x)_j \geqslant 0$ для всех $x \in \ell_\infty$, $A \in \operatorname{conv}\{H^n, n \geqslant 0\}$.

Сформулированные выше классические результаты усиливает

Теорема 1. Существует $B \in \mathfrak{B}$, инвариантный относительно оператора $H \in \Gamma$, т. е. $Bx = BHx$ для всех $x \in \ell_\infty$.

Условиям 1 – 3 удовлетворяют операторы Чезаро

$$(Cx)_n = \left\{ \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} x_k \right\}, \ n = 1, 2, \ldots$$

и операторы растяжения

$$\sigma_n(x_1, x_2, \ldots) = (\underbrace{x_1, x_1, \ldots, x_1}_{n}, \underbrace{x_2, x_2, \ldots, x_2}_{n}, \ldots).$$

Приложения теории банаховых пределов относятся к теории операторов, сингулярным следам, теории вероятностей, ортогональным рядам и другим разделам математики. Совместная работа с Ф. А. Сукочевым (университет Сиднея, Австралия).

О глобальных по времени решениях одного класса дифференциально-алгебраических уравнений со случайными возмущениями

Д.С. Сергеева[1] (Воронеж, ВГУ)
daha192000@mail.ru

Предварительные сведения о производных в среднем имеются в [1,2]. Там также описана естественная модификация понятия непрерывности случайного потока на бесконечности, введенного Л.Шварцем.

Пусть матричный пучок $\lambda L+M$ в $\mathbb{R}^n$ регулярен и удовлетворяет условию ранг-степень (см. [3]). Тогда после применения преобразования Чистякова (см. [3]) матрицы L и M преобразуются.

Рассмотрим уравнение вида

$$\begin{cases} LD_S\xi(t) = M\xi(t) + f(t,\xi(t)) \\ D_2\xi(t) = \overline{\Theta} \end{cases}, \tag{1}$$

где $f(t,x) = (f_1(t,x_1,x_2), f_2(t,x_1,x_2))$ — гладкое отображение $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Уравнение (1) распадается на два:

$$\begin{cases} LD_S\xi_1(t) = J\xi_1(t) + f_1(t,\xi_1(t),\xi_2(t)) \\ D_2\xi(t) = \Theta \end{cases}$$

и

$$\begin{cases} LD_S\xi_2(t) = \xi_2(t) + f_2(t,\xi_1(t),\xi_2(t))) \\ D_2\xi_2(t) = 0. \end{cases}$$

Так как $D_2\xi_2(t) = 0$, ξ_2 является детерминированным процессом и при выполнении условия, введенного в [4], оказывается постоянным вектором из $\mathbb{R}^{n-d}$. При выполнении тех же условий из [4], существует гладкое отображение $\overline{f}(t) : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$, такое, что $f_1(t,x_1,x_2) = \overline{f}(t,x_1)$. Таким образом, (1) сводится к

$$\begin{cases} LD_S\xi_1(t) = J\xi_1(t) + \overline{f}(t,\xi_1(t)) \\ D_2\xi(t) = \Theta. \end{cases} \tag{2}$$

В [5] показано, что при введенных выше условиях уравнение (2) имеет решение, если начальное условие является случайным элементом с гладкой и нигде не равной нулю плотностью распределения.

Теорема. *Для того, чтобы и прямой, и обратный потоки, порожденные уравнением (1), были одновременно полны и непрерывны на бесконечности, необходимо и достаточно, чтобы на* $[0,\infty)\times\mathbb{R}^d$ *существовали положительные гладкие собственные функции* $u(t,x)$ *и* $\overline{u}(t,x)$ *такие, что при всех* (t,x) *выполняются неравенства* $(\frac{\partial}{\partial t}+\mathcal{A})u<C$ *и* $(-\frac{\partial}{\partial t}+\overline{\mathcal{A}})\tilde{u}<\overline{C}$ *для некоторых положительных констант* C *и* $\overline{C}$*, где* $\mathcal{A}$ *и* $\overline{\mathcal{A}}$ *— генераторы прямого и обратного потоков, порожденных уравнением (2).*

Литература

1. Gliklikh Yu.E. Global and stochastic analysis with applications to mathematical physics / Yu.E. Gliklikh. — London : Springer-Verlag, 2011. — XXIII+436 p.

2. Гликлих Ю.Е. Производные в среднем случайных процессов и их применения / Ю.Е. Гликлих. — Владикавказ: ЮМИ ВНЦ РАН, 2016. — 194 с.

3. Чистяков В.Ф. Избранные главы теории алгебро-дифференциальных систем / В.Ф. Чистяков, А.А. Щеглова. — Новосибирск: Наука, 2003. — 317 с.

4. Филипковская М.С. Об условиях глобальной разрешимости дифференциально-алгебраических уравнений / М.С. Филипковская // Материалы международной конференции «Воронежская зимняя математическая школа С.Г. Крейна». — Воронеж : ВГУ. — 2014. — С. 362–372.

5. Азарина С.В. О разрешимости неавтономных стохастических дифференциальных уравнений с текущими скоростями / С.В. Азарина, Ю.Е. Гликлих // Математические заметки. —2016. — Т. 100, № 1. — С. 3–12.

ВИРТУАЛЬНЫЕ ВРЕМЕНА ОЖИДАНИЯ В МОДЕЛИ КЛЕЙНРОКА

Симонян А.Р., Улитина Е.И.

Рассмотрим систему $M_r|G_r|1|\infty$ с интенсивностями входящих потоков $a_1>0,\cdots,a_r>0$. Длительности обслуживания вызовов имеют функцию распределения $B_k(x), B_k(+0)=0,\ k=\overline{1,r}$.

В момент времени $t=0$ система свободна от вызовов. Пусть модель $M_r|G_r|1|\infty$ с дисциплиной Клейнрока. [1-3].

Рассмотрим виртуальные времена ожидания (ВВО) k –вызова, обозначим через $w_k(t)$) в момент времени t [3]. Задача нахождения ФР ВВО $w_k(t)$, $k=\overline{1,r}$, $t\geq 0$, является главной задачей [4-5].

В настоящей работе предложен новый метод анализа $w_k(t)$, $k=\overline{1,r}$, $t\geq 0$.

Обозначим

$$b_k=\int_0^\infty x dB_k(x),\quad a_{ik}=a_i\cdot\left[1-\frac{b_{k+1}}{b_i}\right],\quad \sigma_k=\sum_{i=1}^k a_{ik},\ i=\overline{1,k},\quad k=\overline{1,r},\quad b_{r+1}=0,$$

$$\beta_k(s)=\int_0^\infty e^{-sx}dB_k(x),\quad \omega_k(s,t)=Ee^{-s\omega_k(t)},\quad m_k(s)=s+\sigma_k-\sigma_k\cdot\pi_k(s),\quad s\geq 0,\qquad t\geq 0,$$

E–знак математического ожидания, а функция $\pi_k(s)$ –минимальный корнь функционального уравнения

$$\sigma_k\cdot x=\sum_{i=1}^k a_{ik}\cdot\beta_i(s+\sigma_k-\sigma_k\cdot x).$$

При $k=\overline{1,r}$, $s\geq 0$, $t\geq 0$ справедливы равенства [5]

$$\omega_k(s,t)=\overline{\omega}_k(m_{k-1}(s),t), \tag{1}$$

где $\overline{\omega}_k(s,t)=E\exp(-s\overline{\omega}_k(t))$ и $\overline{\omega}_k(t)$ есть $\omega_k(t)$ при условии прекращения доступа в систему вызовов после момента t.

При $k=\overline{1,r},\ j=\overline{k,r}$ и $s\geq 0$ положим

$$p_k(s)=s-\sum_{i=1}^k a_i\cdot(1-\beta_i(s)),\qquad p_k^j(s)=s-\sum_{i=1}^k a_{ij}\cdot(1-\beta_i(s)).$$

Теорема 1. При любых $k=\overline{1,r}$, $t\geq 0$, $s\geq 0$ имеют место

$$\overline{\omega}_k(s,t)=e^{p_k(s)t}\left\{1-s\cdot\int_0^t e^{-p_k(s)u}P(u)du-\sum_{j=k+1}^r a_j\cdot(1-\beta_j(s))\cdot\int_0^t e^{-p_k(s)v}dv\times\right.$$
$$\left.\times\int_0^{\frac{b_k}{b_k-b_j}(t-v)} e^{-p_k^{j-1}(s)u}\,d_uP(w_j(v)<u)\right\}, \tag{2}$$

где P – знак вероятности и

$$\int_0^\infty e^{-st}P(t)dt=(m_r(s))^{-1},\quad s\geq 0. \tag{3}$$

Уравнения (1)-(3) дают полную информацию о $w_k(t)$, $k=\overline{1,r}$, $t\geq 0$.

В часности из (2) при $k=r$ имеем

$$\omega(s,t) \overset{\text{def}}{=} \overline{\omega}_r(s,t) = e^{p_r(s)t}\left\{1 - s\cdot\int_0^t e^{-p_r(s)u}P(u)du\right\}, \quad t\geq 0, \quad s\geq 0. \qquad (4)$$

Теорема 2. При любых $k=\overline{1,r}$, $t\geq 0$, $s\geq 0$ справедливы равенства

$$\overline{\omega}_k(s,t) = \omega(s,t) +$$

$$+\sum_{j=k+1}^{r} a_j\left(1-\beta_j(s)\right)\sum_{n=k+1}^{j}\int_0^t e^{p_{n-1}(s)y}dy\int_{\frac{b_{n-1}}{b_{n-1}-b_j}y}^{\frac{b_n}{b_n-b_j}y} e^{-p_{n-1}^{j-1}(s)u}\,d_uP(w_j(t-y)<u). \qquad (5)$$

Уравнения (4), (5) также дают полную информацию о $w_k(t)$, $k=\overline{1,r}$, $t\geq 0$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Клейнрок Л. Вычислительные системы с очередьями. – М. Мир, 1979, 600 с.

2. Даниелян Э.А. Об одной системе с динамическими приоритетами//Ученые записки ЕГУ, 3, 1980, с.19-25.

3. Симонян А.Р., Улитина Е.И., Сунцова М.А. Об одной теореме для виртуальных времен ожидания в модели Клейнрока// Обозрение прикладной и промышленной математики. 2008. Т. 15. № 3. С. 518-519.

4. Bagchi U., Sullivan R.S. Dynamic Non-Preemptive Queues with General Linearlily Increasing Priority Function//Opns. Res., 1985, p.1278-1298.

5. Danielian E.A., Lieze F. The Analysis of a Mr|Gr|1|∞ Model with Time Dependent Priorities//Rostock. Math. Kolloq., 43, 1991, p.39-54

Об обобщениях дискретного и интегрального неравенств Коши-Буняковского методом средних значений

С.М. Ситник (БелГУ, Россия)

В докладе в форме небольшого обзора рассматриваются уточнения в терминах средних значений интегрального и дискретного неравенств Коши–Буняковского. Также приведены приложения к получению неравенств для некоторых специальных функций. Результаты можно применить к уточнению оценок ряда величин в теории вероятностей и математической статистике.

Приведём основной результат для уточнения интегрального неравенства Коши-Буняковского [1]–[3]. Назовём абстрактным средним функцию $M(x, y)$, удовлетворяющую естественным условиям: $min(x, y) \leq M(x, y) \leq max(x, y)$ (промежуточность), $M(x, x) = x$ (несмещённость), $M(ax, ay) = a \cdot M(x, y)$ (однородность) и свойству монотонности по каждой переменной. Обозначим через $M^*(x, y)$ величину $M^*(x, y) = \frac{xy}{M(x,y)}$. Тогда справедлива

Теорема 1 *Пусть M - произвольное абстрактное среднее. Тогда справедливо обобщение интегрального неравенства Коши–Буняковского вида*

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)\,dx\right)^2 \leq \int_a^b (M(f,g))^2\,dx \cdot \int_a^b (M^*(f,g))^2\,dx \leq \tag{1}$$

$$\leq \int_a^b (f(x))^2\,dx \cdot \int_a^b (g(x))^2\,dx, \tag{2}$$

Список литературы

[1] S.M. Sitnik. On generalizations of discrete and integral Cauchy-Bunyakovskii inequalities by the method of mean values. Some applications. 2022, preprint arXiv:2203.14344, 39 p.

[2] С.М. Ситник. *Уточнения и обобщения классических неравенств.* Математический форум. Исследования по математическому анализу, 2009, С. 221–266.

[3] P. Agarwal, A. Korenovskii, S. Sitnik. *A Generalization of Cauchy–Bunyakovsky Integral Inequality Via Means with Max and Min Values*, Chapter 18. In: Trends in Mathematics. Advances in Mathematical Inequalities and Applications. Eds.: P. Agarwal, S.S. Dragomir, M. Jleli, B. Samet. Birkhauser Basel, Springer Nature Singapore, 2018, 333–349.

О ЯДРАХ СЛУЧАЙНЫХ ОПЕРАТОРОВ.

СМОРОДИНА Н.В.

Пусть $\xi_x(t)$ – решение стохастического дифференциального уравнения
$$d\xi_x(t) = b(\xi_x(t))b'(\xi_x(t))\,dt + b(\xi_x(t))\,dw(t), \qquad \xi_x(0) = x.$$
В пространстве $L_2(\mathbb{R})$ рассмотрим самосопряженный оператор
$$\mathcal{A} = -\frac{1}{2}\,\frac{d}{dx}\big(b^2(x)\frac{d}{dx}\big) + V(x),$$
заданный на области определения $W_2^2(\mathbb{R})$. Относительно функций $b(x), V(x)$ мы будем предполагать выполнение следующих условий: 1. $V \in L_1(\mathbb{R})$. 2. $b \in C_b^2$ и отделена от нуля. 3. Существует $b_0 > 0$ такое что $\lim\limits_{x\to\pm\infty} b(x) = b_0$. 4. $\lim\limits_{x\to\pm\infty} b'(x) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} b''(x) = 0$. 5. $\int_{\mathbb{R}} x^2(|b(x)-b_0| + |b'(x)|)\,dx < \infty$.

Из условий 1-5 вытекает, что спектр оператора $\mathcal{A}$ состоит из интервала $[0,\infty)$ и, возможно, нескольких отрицательных однократных собственных значений. Через $H_a \subset L_2(\mathbb{R})$ обозначим абсолютно непрерывное подпространство оператора $\mathcal{A}$, а через P_a – ортогональный проектор в $L_2(\mathbb{R})$ на H_a. Через $\mathcal{A}_0 = \mathcal{A}P_a$ обозначим сужение оператора $\mathcal{A}$ на H_a.

Для каждого λ, удовлетворяющего условию $\operatorname{Re}\lambda \leqslant 0$ определим случайный оператор $\mathcal{R}_\lambda^t$, полагая
$$\mathcal{R}_\lambda^t f(x) = \int_0^t e^{\lambda\tau}(P_a f)(\xi_x(\tau))e^{-\int_0^\tau V(\xi_x(s))\,ds}\,d\tau.$$

Теорема 1. *1. С вероятностью 1 оператор $\mathcal{R}_\lambda^t$ является ограниченным интегральным оператором в $L_2(\mathbb{R})$ вида*
$$\mathcal{R}_\lambda^t f(x) = \int_{\mathbb{R}} r_\lambda(t,x,y)f(y)\,dy,$$
причем при $\operatorname{Re}\lambda < 0$ последнее равенство справедливо также для $t = \infty$.

2. Для любых λ, t, x функция $r_\lambda(t,x,\cdot) \in W_2^\alpha$ для любого $\alpha \in [0, \frac{1}{2})$.

Теорема 2. *1. Если $\operatorname{Re}\lambda < 0$ то для любого $f \in H_a$ выполнено*
$$\mathbb{E}\int_{\mathbb{R}} r_\lambda(\infty,\cdot,y)f(y)\,dy = (\mathcal{A}_0 - \lambda I)^{-1}f. \tag{1}$$

2. Если $\operatorname{Re}\lambda = 0$ и $\lambda \neq 0$ то для любого $f \in H_a$ выполнено
$$\lim_{t\to\infty}\mathbb{E}\int_{\mathbb{R}} r_\lambda(t,\cdot,y)f(y)\,dy = (\mathcal{A}_0 - \lambda I)^{-1}f. \tag{2}$$

При $\lambda = 0$ равенство (2) выполнено для любого $f \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_0 - \lambda I)^{-1}$.

ПОМИ РАН, Санкт-Петербург, Россия
E-mail address: smorodina@pdmi.ras.ru

Работа выполнена при поддержке РНФ (грант № 22-21-00016).

О некоторых результатах математического моделирования процессов диффузии, обусловленных взаимодействием заряженных частиц и/или электромагнитного излучения с полупроводниковыми структурами

[1,*] Степович М.А., [2] Туртин Д.В., [1,**] Калманович В.В., [3] Серегина Е.В., [4] Филиппов М.Н.

[1] *Калужский государственный университет им. К.Э. Циолковского, *m.stepovich@mail.ru, **v572264@yandex.ru*

[2] *Ивановский государственный университет, turtin@mail.ru*

[3] *Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана (национальный исследовательский университет), Калужский филиал, evfs@yandex.ru*

[4] *Институт общей и неорганической химии им. Н.С. Курнакова РАН, mn@filippov.org.ru*

Ранее [1] рассмотрены стохастические модели диффузии и последующей излучательной рекомбинации неравновесных неосновных носителей заряда (ННЗ), генерированных в однородных полупроводниках широкими электронными или световыми пучками. Использование широких источников возбуждения позволяет при математическом моделировании использовать одномерные математические модели рассматриваемых явлений, а при проведении экспериментальных исследований для диагностики материалов существенно снизить радиационную нагрузку на объекты исследований.

Для однородных полубесконечных полупроводников и полупроводников конечной толщины дифференциальные уравнения диффузии ННЗ могут быть записаны в виде [2]:

$$D\frac{d^2\Delta p(z)}{dz^2}-\frac{\Delta p(z)}{\tau}=-\rho(z)$$

или

$$D\frac{d^2\Delta p(z,z_0)}{dz^2}-\frac{\Delta p(z,z_0)}{\tau}=-\rho(z)\delta(z-z_0)$$

с соответствующими граничными условиями – в зависимости от характера модели. Здесь символ Δ обозначает изменение соответствующего физического параметра, функции $\Delta p(z)$ и $\Delta p(z,z_0)$, описывают распределение ННЗ по глубине в мишени в результате их диффузии, при этом для второй модели $\Delta p(z)=\int_0^\infty \Delta p(z,z_0)\,dz_0$, z – координата, отсчитываемая от плоской поверхности вглубь полупроводника, $\rho(z)$ – концентрация генерированных ННЗ на глубине z до их диффузии, а D, τ, υ_s – коэффициент диффузии, время жизни и скорость поверхностной рекомбинации ННЗ соответственно, которые для однородных мишеней считаются постоянными.

Если по какой–то причине характер внешнего возбуждения изменится (например, вследствие какого–либо случайного воздействия), то это приведёт к изменению распределений ННЗ после их диффузии в полупроводниковой структуре и, как следствие, к изменению параметров катодолюминесцентного излучения. При математическом моделировании это отвечает изменению правой части дифференциального уравнения диффузии $\rho(z)$, изменению его решения $\Delta p(z)$ или $\Delta p(z,z_0)$ и изменению параметров, характеризующих интенсивность катодолюминесценции $I(E_0,\Theta)$. При возбуждении катодолюминесценции моноэнергетичными электронами E_0 – их энергия, а Θ – вектор параметров, характеризующих мишень. Отчасти такая работа проводилась ранее для однородных [2] и многослойных [3] мишеней; здесь эти исследования продолжены.

В настоящей работе для рассматриваемых математических моделей диффузии и катодолюминесценции получены оценки, позволяющие по изменению правой части дифференциального уравнения диффузии оценить изменение параметров этих процессов. Основной результат сформулирован в виде следующей теоремы.

Теорема. Если

$$\left|\rho_2(z)-\rho_1(z)\right|\leq\varepsilon,$$

где ε – произвольная постоянная, то

$$\left|\Delta p_2(z)-\Delta p_1(z)\right|\leq C_1\varepsilon$$

и

$$\left|I_2(E_0,\Theta)-I_1(E_0,\Theta)\right|\leq C_2\varepsilon.$$

Вид константы уточнён для обеих рассматриваемых моделей: для однородных полубесконечных полупроводников и однородных полупроводников конечной толщины. Поскольку характер внешнего воздействия на полупроводник не конкретизируется, полученные результаты справедливы при воздействии на полупроводник как пучков заряженных частиц, так и электромагнитного излучения.

Полученные результаты использованы при проведении качественных оценок для перспективных материалов полупроводниковой оптоэлектроники.

1. Степович М.А., Серегина Е.В., Туртин Д.В. О некоторых аспектах корректности и стохастических особенностях математических моделей диффузии и катодолюминесценции в полупроводниках // Теория вероятностей и ее применения. – 2020. – Т. 65, вып. 1. – С. 199-200.
2. Туртин Д.В., Степович М.А., Калманович В.В., Картанов А.А. О корректности математических моделей диффузии и катодолюминесценции // Таврический вестник информатики и математики. – 2021. – № 1 (50). – С. 81-100.
3. Степович М.А., Калманович В.В., Серегина Е.В. О возможности приложения матричного метода к моделированию катодолюминесценции, обусловленной широким электронным пучком в планарной многослойной полупроводниковой структуре // Известия РАН. Серия физическая. – 2020. – Т. 84, № 5. – С. 700-703.

ОБ УРАВНЕНИИ КОРДЕВЕГА – ДЕ ФРИЗА С ШУМОМ В ДИСПЕРСИИ И НЕЛЕЙНОМ ЧЛЕНЕ

Д.А. Сучкова
dil9ara@rambler.ru

Введём стохастическое уравнение Кордевега – де Фриза в форме Стратоновича:

$$d_t u + \alpha u_x dt + \beta u u_x * dW(t) + \gamma u_{xxx} * dW(t) = 0, \tag{1}$$

которое формально можно записать в виде

$$u_t + \alpha u_x + (\beta u u_x + \gamma u_{xxx}) W'(t) = 0, \tag{2}$$

где $\alpha, \beta, \gamma > 0$, а $u(x,t,W(t)), u(x,0,0) = u_0, (x,t) \in \mathbf{R} \times [\mathbf{0}, \mathbf{T}]$ — случайный процесс, описывающий распространение длинных волн, $W(t), W(0) = 0$ — стандартный вещественнозначный винеровский процесс, который действует на нелинейный и дисперсионный члены уравнения. Уравнение Кордевега – де Фриза используется как приближение для описания однонаправленного распространения волн с малой амплитудой и большой длиной в нелинейных дисперсивных системах. В физическом смысле шум, накладываемый на нелинейный член, определяет влияние факторов окружающий среды на поднятие волны, а шум, накладываемый на дисперсионный член, определяет случайную природу рессеивания волны, что являтся более адекватной моделью конкретных физических явлений, которые носят стохастический характер.

Ранее стохастическое уравнение Кордевега – де Фриза было исследовано в статье A de Bouard, A Debussche [1] в 1998 году. Авторы рассмотрели КдФ со случайным членом типа белого шума в правой части уравнения. Это может быть модель водяных волн на жидкости, находящейся под случайным давлением. В статье доказано существование и единственность решений в $H^1(R)$ в случае аддитивного шума и существование мартингальных решений в $L^2(R)$ в случае мультипликативного шума.

Затем Debussche A. [2] численно исследовал влияние однородного шума на эволюцию решений уравнения Кордевега де Фриза методом конечных элементов и наименьших квадратов. Численные эксперименты проводились для различных значений амплитуды шума. Было замечено, что в распространение ион-акустических солитонов в плазме должен быть добавлен член с пространственно-временным шумом для приближения к экспериментальным данным.

Однако в этих статьях исследовался лишь возмущающий член в виде шума в правой части уравнения. В то время как в данной работе предлагается рассмотреть шум, накладываемый на нелинейный член, который определяет влияние факторов окружающий среды на поднятие волны, и шум, накладываемый на дисперсионный член, который определяет случайную природу рессеивания волны.

Для удобства разобьём рассуждение на шаги:

Шаг 1. Цель данного шага — приведение уравнения (1) к цепочке детерминированных уравнений. Распишем стохастические дифференциалы в форме Стратоновича:

$$d_t u = u_t dt + u_v * dW(t),$$

где $u(x,t,v)$ — детерминированная функция трех переменных, имеющая непрерывные производные третьего порядка. Тогда уравнение (1) перепишется в виде дифференциального уравнения в полных дифференциалах:

$$u_t dt + u_v * dW(t) + \alpha u_x dt + \beta u u_x * dW(t) + \gamma u_{xxx} * dW(t) = 0, \tag{3}$$

где $\alpha, \beta, \gamma > 0$, а $u(x,t,W(t)), u(x,0,0) = u_0, (x,t) \in \mathbf{R} \times [\mathbf{0}, \mathbf{T}]$ — случайный процесс, описывающий распространение длинных волн, $W(t), W(0) = 0$ — стандартный вещественнозначный винеровский процесс, который действует на нелинейный и дисперсионный члены уравнения. Воспользуемся техникой сведения стохастических дифференциальных уравнений (СДУ) Ито в форме Стратоновича к цепочке дифференциальных уравнений [3],[4], подробно описанной в [4] в части исследования потраекторных аналогов одномерных стохастических дифференциальных уравнений с симметричным интегралом, условий их существования и единственности.
Сгруппируем слагаемые:

$$(u_t + \alpha u_x)dt + (u_v + \beta u u_x + \gamma u_{xxx}) * dW(t) = 0. \tag{4}$$

Откуда следует следующая цепочка уравнений:

$$u_t + \alpha u_x = 0, \tag{5}$$

$$u_v + \beta u u_x + \gamma u_{xxx} = 0. \tag{6}$$

Стоит отметить, что полученные уравнения являются детерминированными, решением уравнений является функция трех переменных $u(x,t,v)$, при $v = W(t)$. Заметим, что первое уравнение (5) из цепочки — линейное однородное уравнение в частных производных первого порядка — уравнение переноса на переменные t и x, где v выступает в роли параметра, а второе уравнение (6) — классическое нелинейное детерминированное уравнение Кордевега – де Фриза на переменные v и x, где t выступает в роли параметра.

Шаг 2. Общее решение линейного однородного уравнения (5) в частных производных первого порядка на переменные t и x, где v выступает в роли параметра, представляется в виде $u(x,t,v) = \phi(x - \alpha t, v)$, где решение $u(x,t,v)$ остается постоянным вдоль каждой из характеристик, а ϕ — произвольная функция. Отсюда следует единственность решения с точностью до функции ϕ, которая затем определяется частным решением, показанным ниже.

Рассмотрим второе уравнение цепочки (6) — классическое нелинейное детерминированное уравнение Кордевега – де Фриза на переменные v и x, где t выступает в роли параметра. Пусть $\overline{u}(x,t,v)$ — частное решение этого уравнения, удовлетворяющее начальным условиям с учетом условия $v = W(t)$. Тогда решение $\overline{u}(x,t,v)$ существует и единственно в силу теоремы для детерминированного нелинейного уравнения Кордевега – де Фриза.

Шаг 3. Подставим общее решение уравнение (5) во второе уравнение цепочки (6), получаем следующее уравнение:

$$\phi_v + \beta \phi \phi_y + \gamma \phi_{yyy} = 0, \tag{7}$$

где $y = x - \alpha t$. Это есть не что иное, как классическое нелинейное детерминированное уравнение Кордевега – де Фриза на переменные v и y, где t выступает в роли параметра. Таким образом, любое частное решение уравнения (7) представляется в виде $u(x,t,v) = \phi(x - \alpha t, v)$.

Возникает вопрос, как строить решения уравнения (7).

Пусть $\phi(y,t,v)$ — любое частное решение классического уравнения Кордевега – де Фриза (7), где t выступает в роли параметра, тогда $\phi_1(y,t,v) = \phi(y,t,v)$ при $v = W(t), W(t) \geq 0$ и $\phi_2(y,t,v) = \phi(y,t,v)$ при $v = W(t), W(t) < 0$. Поэтому решение цепочки (5), (6), а следовательно уравнения (7) и СДУ (1) представляется в виде

$$u(x,t,W(t)) = \phi_1(x-\alpha t, W(t)) \cdot \mathbf{1}(W(t) \geq 0) + \phi_2(x - \alpha t, W(t)) \cdot \mathbf{1}(W(t) < 0).$$

Шаг 4. Решение уравнения (1) свелось к решению уравнений (5), (6), (7) решение которых существует. Таким образом, метод построения решений для СДУ Кордевега – де Фриза (1), состоящий из шагов 1-3, является доказательством следующей теоремы существования решений:

Теорема. *Пусть $\phi(y,t,v)$ — любое частное решение классического уравнения Кордевега – де Фриза (7), тогда решение стохастического уравнения длинной волны Кордевега – де Фриза с шумом в дисперсии и нелиейном члене (1) существует и единственно в классе функций, являющемся пересечением двух классов: класса функций, для которых определено единственное решение линейного однородного уравнения в частных производных первого порядка (5) и класса функций, для которых определено единственное решение нелинейного детерминированного уравнения Кордевега – де Фриза (6). Кроме того, решение уравнения (1) однозначно находится по полученному в шагах 1-3 методу.*

Следствие. *Существенно, что в качестве случайной функции можно брать не только винеровский процесс, но и произвольную непрерывную с вероятностью 1 случайную функцию (реализацию случайного процесса), которая имеет неограниченную вариацию.*

Таким образом, разработан аналитический метод решения и доказательство теоремы существования и единственности решения задачи Коши для СДУ Кордевега–де Фриза с шумом в дисперсии и нелиейном члене.

Моделирование уравнения Кордевега – де Фриза с шумом в нелинейном и дисперсионном члене сводится к классическому детерминированному уравнению Кордевега – де Фриза, что существенно облегчает моделирование СДУ КдФ. А частные решения детерминированного КдФ можно использовать для построения решений стохастического КдФ.

Литература

1. *A de Bouard, A Debussche* On the Stochastic Korteweg–de Vries Equation // Journal of Functional Analysis, Volume 154, Issue 1, 1 April 1998, Pages 215-251.

2. *Debussche A.* Numerical simulation of the stochastic Kordeweg-de Vries equation/ A. Debussche, J. Printems //Physica D 134. – 1999. – 200-226.

3. *Насыров Ф.С.* Локальные времена, симметричные интегралы и стохастический анализ. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2011. — 212 с.

4. *Насыров Ф.С., Исмагилов Н.С., Абдуллин М.А.* Одномерные стохастические дифференциальные уравнения: потраекторный подход. — Уфимский математический журнал. Том 5. №4 (2013).С. 3-16.

Оценивание квантилей функции распределения с использованием полиномов Бернштейна

Тихов М.С.

Нижний Новгород, Россия
Нижегородский Государственный Университет им. Н.И.Лобачевского,
Институт Информационных Технологий, Математики и Механики,
Кафедра Теории Вероятностей и Анализа Данных
E-mail: tikhovm@mail.ru

Пусть $X_1, X_2, \ldots, X_n$ есть латентные (ненаблюдаемые) независимые и одинаково распределенные случайные величины с неизвестной непрерывной функцией распределения $F(x)$ и плотностью распределения $f(x) > 0, x \in (0,1)$, отрезок $[0,1]$ – носитель этого распределения, $u_i = i/n, i = 0,1,\ldots,n$ – точки деления интервала $[0,1]$ и $W_i = I(X_i < u_i)$ есть индикатор события:$\{\ X_i < u_i\}$. Рассматривается задача оценивания квантиля порядка $0 < \lambda < 1$ функции распределения $F(x)$ на основе данных $(W_i, u_i, i = 0,\ldots,n)$. Такая задача возникает в биологии и называется зависимостью «доза-эффект» (см. [1], [2], [3]). Заметим, что $\mathbf{E}(W_i) = F(u_i)$.

Обычная практика оценивания $F(x)$ и ее квантилей состоит в использовании ядерных оценок [2]. В последнее время появилось большое количество работ, посвященных оцениванию функции распределения с использованием для этой цели полиномов $b_k(n,x) = C_n^k x^k (1-x)^{n-k}, k = 0,1,\ldots,n, x \in (0,1)$. Так, в работах [4], [5] для полной выборки $X_1, X_2, \ldots, X_n$ предлагается использовать статистику $\hat{F}_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} F_n(u_k) b_k(n,x)$ в качестве оценки функции распределения $F(x)$, где $F_n(x)$ есть эмпирическая функция распределения. Для бернуллиевской функции регрессии оценки с использованием полиномов Бернштейна изучены в работе [6], именно, в качестве оценки для $F(x)$ предложена статистика

$$F_n^*(x) = \sum_{k=0}^{n} W_k b_k(n,x).$$

Так как $\mathbf{E}(F_n^*(x)) = B_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} F_n(u_k) b_k(n,x)$ является полиномом Бернштейна порядка n и $\sqrt{4\pi n x(1-x)} \sum_{k=0}^{n} b_k^2(n,x) = 1 + o(1)$ [4], то эти оценки состоятельны и в [6] также показано, что они асимптотически нормальны.

Теперь для заданного $0 < \lambda < 1$ определим

$$x_\lambda = \inf x : F(x) \geqslant \lambda, \quad \hat{x}_{n,\lambda} = \inf x : F_n^*(x) \geqslant \lambda.$$

В настоящем сообщении мы рассматриваем статистику $\hat{x}_{n,\lambda}$ в качестве оценки квантиля x_λ порядка $0 < \lambda < 1$. Имеют место следующие результаты.

Теорема 1. *Пусть $F(x)$ имеет третью ограниченную производную и $0 < \lambda < 1$ задано. Тогда*

$$\hat{x}_{n,\lambda} \xrightarrow[n\to\infty]{p} x_\lambda.$$

Теорема 2. *При условиях предыдущей теоремы*

$$\sqrt{n}(x_{n,\lambda} - x_\lambda) \xrightarrow[n\to\infty]{d} N(0,\sigma^2), \quad \textit{где} \quad \sigma^2 = \frac{\lambda(1-\lambda)}{4\pi f^2(x_\lambda) x_\lambda (1-x_\lambda)}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. M.S. Tikhov. *Statistical Estimation Based on Interval Censored Data* // Parametric and Semiparametric Models with Applications to Reliability, Survival Analysis, and Quality of Life (ed. N.Balakrishnan etc.). Springer, NY. 555 p., 211-218 (2004).

2. С.В. Криштопенко, М.С. Тихов, Е.Б. Попова. *Доза-эффект*, М.: Медицина. 2008. 288 с.

3. М.С. Тихов, Д.С. Криштопенко. *Оценивание распределений в зависимости доза-эффект при фиксированном плане эксперимента* // Статистические методы оценивания и проверки гипотез: межвуз. сб. науч. тр., Перм. ун-т, Пермь, 66-77 (2006).

4. G.J. Basu, A.J. Canty, Y.P. Chaubey. *Application of Bernstein polynomials for smooth estimation of a distribution and density function* // Journal of Statistical Planning and Inference, **105**, 377-392 (2002).

5. A. Leblanc. *On estimating distribution functions using Bernstein polynomials* // Ann. Inst. Statist. Math., **64**:5, 919-943 (2012)

6. П. Бабилуа, Е. Надарая. *Об одном новом методе оценки бернуллиевской функции регрессии* // Теория вероятн. и её примен., **67**:2, 209-222 (2022).

Циклический алгоритм с продлением и дообслуживанием при управлении конфликтными потоками неоднородных требований

Федоткин А. М.[1], Маркина Н. С.[2]

Россия, Нижний Новгород,
Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского,
Институт информационных технологий, математики и механики,
кафедра дифференциальных уравнений, математического и численного анализа[1]
кафедра теории вероятностей и анализа данных[2]
fandr@vmk.unn.ru[1], natalia.marckina2010@yandex.ru[2]

В работе [1] исследована математическая модель реальной системы циклического управления конфликтными транспортными потоками малой интенсивности на изолированном перекрёстке. Рассмотрим теперь систему управления конфликтными неординарными пуассоновскими потоками Π_1 и Π_2 [2] с помощью циклического алгоритма с продлением и дообслуживанием. При $j = 1, 2$ поток Π_j является неординарным пуассоновским с интенсивностью λ_j для вызывающих моментов. В каждый вызывающий момент по потоку Π_j может поступить одна, две или три заявки соответственно с вероятностью p_j, q_j или s_j, где $p_j + q_j + s_j = 1$. Множество состояний обслуживающего устройства, реализующего циклический алгоритма с продлением и дообслуживанием, будем обозначать через $\Gamma = \{\Gamma^{(1)}, \Gamma^{(2)}, \Gamma^{(3)}, \Gamma^{(4)}\}$, где длительность каждого состояния $\Gamma^{(e)}$ при $e \in M = \{1, 2, 3, 4\}$ равна T_e. При каждом состоянии $\Gamma^{(2j-1)}$ обслуживается только поток Π_j с пропускной способностью $l_j = [\mu_j T_{2j-1}]$, где μ_j – интенсивность обслуживания заявок этого потока. Состояние $\Gamma^{(2j)}$, $j = 1, 2$, соответствует процессу переналадки обслуживающего устройства после обслуживания соответствующего потока. В это время дообслуживаются только заявки потока Π_j, которые уже начали обслуживаться в предыдущем состоянии. Считаем, что $T_{2j-1} > T_{2j}$. Пропускную способность в состоянии $\Gamma^{(2j)}$ обозначаем $l'_j = [\mu_j T_{2j}]$, $l'_j \le l_j$. Смена текущего состояния обслуживающего устройства или его продление принимается в случайные моменты времени $\tau_0, \tau_1, \ldots$ Пусть случайный элемент $\Gamma_i \in \Gamma$ есть состояние обслуживающего устройства на промежутке времени $[\tau_i, \tau_{i+1})$ при $i \in I = \{0, 1, \ldots\}$. Будем предполагать, что $\tau_{i+1} = \tau_i + f(\Gamma_i)$, $i \in I$, где $f(\Gamma^{(e)}) = T_e$, $e \in M$. Так как потоки Π_1 и Π_2 не могут обслуживаться одновременно на любом промежутке $[\tau_i, \tau_{i+1})$, то они являются конфликтными [1]. Введем следующие случайные величины, с помощью которых обозначим характеристики системы на этих промежутках времени:

– $\eta_{j,i} \in X = \{0, 1, \ldots\}$ — количество поступивших в систему требований потока Π_j за промежуток времени $[\tau_i, \tau_{i+1})$;

– $\varkappa_{j,i} \in X$ — количество находящихся в очереди ожидания требований потока Π_j в момент времени τ_i;

– $\xi_{j,i} \in \{0, l'_j, l_j\}$ — максимальное количество требований потока Π_j, которое может быть обслужено за промежуток времени $[\tau_i, \tau_{i+1})$;

– $\xi'_{j,i} \in Y_j = \{0, 1, \ldots, l_j\}$ — реально обслуженное количество требований потока Π_j за промежуток времени $[\tau_i, \tau_{i+1})$.

На содержательном уровне процесс обслуживания требований и управление потоками можно описать следующим образом. Обозначим через $h_1 \in \{0, 1, \ldots, l_1 - 1\}$ величину порога потока Π_1 и через $h_2 \in \{0, 1, \ldots, l_2 - 1\}$ величину порога потока Π_2. Обслуживание первого потока происходит в состоянии $\Gamma^{(1)}$, при этом второй поток не обслуживается. Если $\varkappa_{2,i} + \eta_{2,i}$ не достигнет величины h_2 к концу текущего интервала $[\tau_i, \tau_{i+1})$, то обслуживающее устройство продлевает состояние $\Gamma^{(1)}$ на такой же промежуток времени, иначе переходит в следующее состояние $\Gamma^{(2)}$. Пусть теперь обслуживание второго потока происходит в состоянии $\Gamma^{(3)}$, при этом первый поток не обслуживается. Аналогично, если по первому потоку Π_1 очередь меньше порогового значения h_1, то обслуживающее устройство продлевает состояние $\Gamma^{(3)}$ на такой же промежуток времени, иначе переходит в состояние $\Gamma^{(4)}$. Из остальных состояний обслуживающее устройство может перейти только в следующее состояние, то есть из $\Gamma^{(2)}$ в $\Gamma^{(3)}$ и из $\Gamma^{(4)}$ в $\Gamma^{(1)}$. Состояния $\Gamma^{(2)}$ и $\Gamma^{(4)}$ соответствуют периоду дообслуживания только заявок первого потока и только заявок второго потока. При $h_2 = 0$ и $h_2 = 0$ приведенный выше алгоритм управления превращается в циклический на множестве состояний $\{\Gamma^{(1)}, \Gamma^{(2)}, \Gamma^{(3)}, \Gamma^{(4)}\}$. Величина порога h_j ограничена сверху пропускной способностью l_j. Это сделано потому, что в случае $h_j \geq l_j$ система не сможет справиться с обслуживанием потока Π_j. Тогда по этому потоку начнет возрастать количество ожидающих требований обслуживания и управление будет неэффективно.

При $\Gamma^{(e)} \in \Gamma$, $x_1 \in X$, $m_1 \in X$, $x_2 \in X$, $m_2 \in X$ определим теперь функцию

$$u(\Gamma^{(e)}, x_1, m_1, x_2, m_2,) = \begin{cases} \Gamma^{(e+1)}, & e = 2; \\ \Gamma^{(1)}, & e = 4; \\ \Gamma^{(1)}, & e = 1, x_2 + m_2 < h_2; \\ \Gamma^{(2)}, & e = 1, x_2 + m_2 \geq h_2; \\ \Gamma^{(3)}, & e = 3, x_1 + m_1 < h_1; \\ \Gamma^{(4)}, & e = 3, x_1 + m_1 \geq h_1. \end{cases}$$

Математической моделью система управления конфликтными неординарными пуассоновскими потоками Π_1 и Π_2 с помощью циклического алгоритма с продлением и дообслуживанием является многомерная случайная последовательность вида

$$\{(\Gamma_i, \varkappa_{1,i}, \varkappa_{2,i}, \xi'_{1,i-1}, \xi'_{2,i-1}), i \in I\},$$

где

$$\begin{aligned} \Gamma_{i+1} &= u(\Gamma_i, \varkappa_{1,i}, \eta_{1,i}, \varkappa_{2,i}, \eta_{2,i}), \\ \varkappa_{1,i+1} &= \max\{0, \varkappa_{1,i} + \eta_{1,i} - \xi_{1,i}\}, \\ \varkappa_{2,i+1} &= \max\{0, \varkappa_{2,i} + \eta_{2,i} - \xi_{2,i}\}, \\ \xi'_{1,i} &= \min\{\varkappa_{1,i} + \eta_{1,i}, \xi_{1,i}\}, \\ \xi'_{2,i} &= \min\{\varkappa_{2,i} + \eta_{2,i}, \xi_{2,i}\}. \end{aligned} \tag{1}$$

Справедлива следующая теорема.

Теорема 1. Многомерная случайная последовательность

$$\{(\Gamma_i, \varkappa_{1,i}, \varkappa_{2,i}, \xi'_{1,i-1}, \xi'_{2,i-1}), i \in I\},$$

для которой выполняются приведенные выше соотношения (1), с заданным начальным распределением вектора $(\Gamma_0, \varkappa_{1,0}, \varkappa_{2,0}, \xi'_{1,-1}, \xi'_{2,-1})$ на пространстве $\Gamma \times X \times X \times Y_1 \times Y_2$ является однородной многомерной марковской цепью.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Федоткин А. М., Федоткин М. А.* Анализ и оптимизация выходных процессов при циклическом управлении конфликтными транспортными потоками Гнеденко-Коваленко. Автоматика и телемеханика. 2009, № 12, с. 92–108.
2. *Федоткин М. А., Федоткин А. М., Кудрявцев Е. В.* Динамические модели неоднородного потока транспорта на магистралях. 2020, № 8, с. 149–164.

© 2022 г. В.Л. ХАЦКЕВИЧ, д-р техн. наук (vlkhats@mail.ru)
(ВУНЦ ВВС ВВА им. проф. Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина, Воронеж)

О МЕТОДЕ ФУНКЦИЙ ГРИНА В ЗАДАЧЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ СЛУЧАЙНОГО СИГНАЛА ЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМОЙ

В данной работе рассматривается ситуация, когда на вход некоторого устройства A поступает непрерывный случайный сигнал $\eta(t)$, а на выходе наблюдается непрерывный случайный сигнал $\xi(t)$.

Устройство A называют линейной динамической системой, если связь между входом и выходом описывается дифференциальным уравнением n-го порядка с постоянными коэффициентами. Если на входе и выходе наблюдаются случайные сигналы $\eta(t)$ и $\xi(t)$ соответственно, то линейная динамическая система описывается дифференциальным уравнением в гильбертовом пространстве случайных величин с конечным вторым моментом

$$a_n\eta^{(n)}(t) + a_{n-1}\eta^{(n-1)}(t) + \cdots + a_1\eta'(t) + a_0\eta(t)$$
$$= b_k\xi^{(k)}(t) + b_{k-1}\xi^{(k-1)}(t) + \ldots + b_1\xi'(t) + b_0\xi(t) \equiv f(t). \qquad (1)$$

Здесь коэффициенты $a_i (i = 0, \ldots, n)$ и $b_i (i = 0, \ldots, k)$ – постоянные числа.

Известный [1, гл. 8] подход при изучении динамической системы (1) состоит в предположении стационарности (в широком смысле) входных и выходных случайных сигналов и использовании частотностной характеристики. Он связан с прямым и обратным преобразованием Фурье случайных процессов. Наш подход, использующий метод функции Грина, не предполагает стационарности входного и выходного случайных сигналов.

Рассмотрим скалярное дифференциальное уравнение n-го порядка с постоянными коэффициентами

$$a_n x^{(n)} + a_{n-1}x^{(n-1)} + \ldots + a_1 x' + a_0 x = h(t). \qquad (2)$$

Имеет место

Лемма 1 ([2], гл. I, §8). *Пусть корни характеристического уравнения* $a_n\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_1\lambda + a_0 = 0$ *не содержат точек мнимой оси. Тогда для любой непрерывной ограниченной на всей оси функции h(t) уравнение (2) имеет ограниченное на всей оси решение, причем единственное. Оно дается формулой*

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G\,(t-s) f(s) ds, \qquad (3)$$

где $G(t)$ *– функция Грина задачи об ограниченных решениях уравнения (2).*

Замечание 1. Пусть в условиях леммы 1 все корни характеристического уравнения лежат в левой полуполоскости (Re $\lambda_i < 0$ $i = 1, \dots, n$). Тогда ограниченное решение уравнения (2) асимптотически устойчиво по Ляпунову.

Связь между математическими ожиданиями входного и выходного случайных сигналов характеризует

Теорема 1. *Пусть входной случайный процесс $f(t)$ ограничен на всей числовой оси, а корни характеристического уравнения $a_n\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0 = 0$ не содержит точек мнимой оси. Тогда математическое ожидание $M\eta(t)$ случайного процесса на выходе динамической системы (1) представимо в виде*

$$M\eta(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G\,(t-s)Mf(s)ds, \tag{4}$$

где G – функция Грина задачи об ограниченных решениях уравнения (2).

Следствие 1. Пусть в условиях теоремы 1 на вход поступает «квазистационарный» сигнал, т.е. $M\xi(t) = m_\xi = const$. Тогда на выходе также будет «квазистационарный» сигнал, причем его математическое ожидание $M\eta(t) = m_\eta = \frac{b_0}{a_0} m_\xi$.

Связь между корреляционной функцией $K_\eta(t_1, t_2)$ случайного сигнала на выходе динамической системы (1) и корреляционной функции $K_\xi(t_1, t_2)$ случайного сигнала на входе характеризует

Теорема 2. *Пусть выполнены условия теоремы 1 и дополнительно вещественные части всех корней характеристического уравнения отрицательны (Re $\lambda_i < 0$ $i = 1, \dots, n$). Тогда корреляционная функция $K_\eta(t_1, t_2)$ случайного сигнала $\eta(t)$ на выходе динамической системы (1) определяется формулой*

$$K_\eta(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{t_1}\int_{-\infty}^{t_2} G(t_1-\tau_1)\,G(t_2-\tau_2)K_f(\tau_1, \tau_2)d\tau_1 d\tau_2, \tag{5}$$

где $K_f(\tau_1, \tau_2)$ – корреляционная функция входного сигнала $f(t) = \sum_{i=1}^{n} b_i \xi^{(i)}(t)$, а G – функция Грина задачи об ограниченных решениях уравнения (2).

Пример 1. На вход интегрирующей RC-цепочки, описываемой дифференциальным уравнением

$$\eta'(t) + \beta\eta(t) = \beta\xi(t), \beta = \frac{1}{RC} > 0 \tag{6}$$

поступает непрерывный случайный ограниченный на всей оси сигнал $\xi(t)$ с математическим ожиданием $M\xi(t)$.

Заметим, что функция Грина задачи об ограниченных решениях уравнения (6) имеет вид

$$G_1(t) = \begin{cases} e^{-\beta t} \text{ при } t > 0; \\ 0 \quad \text{ при } t < 0. \end{cases}$$

Тогда математическое ожидание $M\eta(t)$ на выходе динамической системы (6), согласно теореме 1 представляется формулой

$$M\eta(t) = \beta \int_{-\infty}^{t} e^{-\beta(t-s)} M\xi(s)ds.$$

Корреляционная функция $K_\eta(t_1, t_2)$ на выходе динамической системы (6) связана с корреляционной функцией $K_\xi(t_1, t_2)$ на входе согласно теореме 2 формулой

$$K_\eta(t_1, t_2) = \beta^2 e^{-\beta(t_1+t_2)} \int_{-\infty}^{t_1} \int_{-\infty}^{t_2} e^{\beta(\tau_1+\tau_2)} K_\xi(\tau_1, \tau_2) d\tau_1 \, d\tau_2.$$

Пример 2. На вход линейной динамической системы, описываемой дифференциальным уравнением

$$\eta''(t) + 4\eta'(t) + 3\eta(t) = \xi(t) \tag{7}$$

поступает непрерывный случайный ограниченный на всей оси сигнал $\xi(t)$. Укажем характеристики выходного случайного сигнала $\eta(t)$.

Заметим, что корни характеристического уравнения $\lambda^2 + 4\lambda + 5 = 0$ имеют вид $\lambda_1 = -3, \lambda_2 = -1$. Тогда в соответствии с теоремой 1

$$M\eta(t) = \int_{-\infty}^{t} G_2\,(t-s) M\xi(s)ds,$$

где функция Грина G_2 задачи об ограниченных решениях имеет вид

$$G_2(t) = \begin{cases} \left(e^{\lambda_2 t} - e^{\lambda_1 t}\right)(\lambda_2 - \lambda_1)^{-1} \text{ при } t > 0; \\ 0 \qquad\qquad\qquad\qquad\quad \text{ при } t < 0. \end{cases}$$

Корреляционные функции входного и выходного случайных сигналов динамической системы (7) в соответствии с теоремой 2 связаны соотношением

$$K_\eta(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{t_1} \int_{-\infty}^{t_2} G_2(t_1 - \tau_1)\, G_2(t_2 - \tau_2) K_\xi(\tau_1, \tau_2) d\tau_1 d\tau_2.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Вентцель Е.С., Овчаров Л.А.* Теория случайных процессов и их инженерные приложения. М.: Кнорус, 2016. 439 с.

2. *Красносельский М.А., Бурд В.Ш., Колесов Ю.С.* Нелинейные почти периодические колебания. М.: Наука, 1970. 351 с.

Чуб Е.Г., Погорелов В.А. (ДГТУ, Ростов-на-Дону, Россия), **Стохастическая нелинейная динамическая модель гиростабилизатора информационно-измерительного комплекса путеизмерительного вагона.**

Исследовалась динамика движения гиростабилизированного информационно-измерительного комплекса путеизмерительного вагона (ИИК ПВ) в условиях действия помех.

Теорема. Пусть стохастическая модель гиростабилизированного ИИК ПВ в форме «объект-наблюдатель» имеет вид: $\dot{Y} = F(Y,t) + F_0(Y,t)\xi$, где Y - вектор состояния размерности $n = 3$, описывающий динамику объекта, F , F_0 -известные нелинейные функции , определяемые из условия функционирования ИИК ПВ, удовлетворяющие условию Липшица для всех Y, t, и дифференцируемые N раз на интервале времени (t_0, t), $\xi = (w \vdots W)$, w- вектор случайных возмущающих ускорений, описываемый в общем случае белым гауссовским шумом (БГШ) с нулевым математическим ожиданием и известной матрицей интенсивностей $D_w(t)$, W- БГШ с нулевым математическим ожиданием и матрицей интенсивностей $D_W(t)$, W_A - БГШ с нулевым математическим ожиданием и матрицей интенсивностей $D_{W_A}(t)$. Тогда апостериорная плотность вероятности ИИК ПВ может быть аппроксимирована системой моментов:

$\dot{m}_j^p = j \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n^p m_{n+j-1}^p + \frac{j(j-1)}{2} \sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n^p m_{n+j-2}^p + \sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n^p m_n^p$, $p = 1, 2, 3;$

$$\dot{m}_{j,s}^{1,2} = -j \sum_{n=0}^{\infty} a_n^1 m_{n+j-1,s}^{1,2} - s \sum_{n=0}^{\infty} a_n^2 m_{j,n+s-1}^{1,2} + \frac{1}{2} \Bigg(j(j-1) \sum_{n=0}^{\infty} b_n^1 m_{n+j-2,s}^{1,2} +$$

$$+ s(s-1) \sum_{n=0}^{\infty} b_n^2 m_{j,n+s-2}^{1,2} + js \sum_{n=0}^{\infty} b_n^{12(2)} m_{j-1,n+s-1}^{1,2} +$$

$$+ js \sum_{n=0}^{\infty} b_n^{21(1)} m_{n+j-1,s-1}^{1,2} \Bigg) + \sum_{n=0}^{\infty} f_n^1 m_{j+n,s}^{1,2};$$

$$\dot{m}_{j,k}^{1,k} = -j \sum_{n=0}^{\infty} a_n^1 m_{n+j-1,k}^{1,3} - k \sum_{n=0}^{\infty} a_n^3 m_{j,n+k-1}^{1,3} + \frac{1}{2} \Bigg(j(j-1) \sum_{n=0}^{\infty} b_n^1 m_{n+j-2,k}^{1,3} +$$

$$+ k(k-1) \sum_{n=0}^{\infty} b_n^3 m_{j,n+k-2}^{1,3} + jk \sum_{n=0}^{\infty} b_n^{13(3)} m_{j-1,n+k-1}^{1,3} +$$

$$+ jk \sum_{n=0}^{\infty} b_n^{31(1)} m_{n+j-1,k-1}^{1,3} \Bigg) + \sum_{n=0}^{\infty} f_n^1 m_{j+n,k}^{1,3};$$

$$\dot{m}_{s,k}^{2,3} = -s \sum_{n=0}^{\infty} a_n^2 m_{n+s-1,k}^{2,3} - k \sum_{n=0}^{\infty} a_n^3 m_{s,n+k-1}^{2,3} + \frac{1}{2} \Bigg(s(s-1) \sum_{n=0}^{\infty} b_n^2 m_{n+s-2,k}^{2,3} +$$

$$+ k(k-1) \sum_{n=0}^{\infty} b_n^3 m_{s,n+k-2}^{2,3} + sk \sum_{n=0}^{\infty} b_n^{23(3)} m_{s-1,n+k-1}^{2,3}$$

$$+ sk \sum_{n=0}^{\infty} b_n^{32(2)} m_{n+s-1,k-1}^{2,3} \Bigg) + \sum_{n=0}^{\infty} f_n^2 m_{s+n,k}^{2,3},$$

где $j, s, k = 1, 2, 3$, a_n^i, b_n^i, f_n^i - коэффициенты разложения.

Предложенный метод позволяет значительно уменьшить объем вычислительных затрат, что повышает эффективность работы перспективных информационно-измерительных комплексов путеизмерительных вагонов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Chub, E.G., Pogorelov, V.A.* Identification algorithm for telecommunication systems with uncertain parameters of their vector of state stochastic model// Journal of Physics: Conference Seriesthis, 2021, 2131(2), 022090.

2. *Pogorelov, V., Chub, E.* Markov model of data measurement complex for track geometry car // E3S Web of Conferences, 2020, 224, 02029.

3. *Sokolov S.V., Pogorelov V.A. Chub E.G.* Suboptimal stochastic control synthesis for 3D orientation of a girostabilized platform // 21st Saint Petersburg International Conference on Integrated Navigation Systems, -ICINS 2014. - Proceedings 21. - 2014. - pp. 206-209.

4. *Sokolov, S.V., Pogorelov, V.A., Shatalov, A.B.* General Solution of the Problem of Nonlinear Filtration of the Orientation Parameters of the Antenna Complex by Inertial Measurements// Russian Aeronautics 2021, 64(1), pp. 132–141.

5. *Mit'kin A., Pogorelov, V., Chub, E.* Using the Pearson Distribution for Synthesis of the Suboptimal Algorithms for Filtering Multi-Dimensional Markov Processes // Radiophysics and Quantum Electronics. 2015. 58. 10.1007/s11141-015-9596-z.

Предельное поведение порядковых статистик на длинах циклов случайных A-подстановок

А.Л. Якымив*
Математический институт им. В.А. Стеклова

Зафиксируем некоторое множество натуральных чисел A. Через $T_n(A)$ обозначим множество подстановок степени n, длины циклов которых принадлежат множеству A (так называемых A-подстановок). Рассматривается случайная подстановка τ_n, равномерно распределённая множестве $T_n(A)$. Пусть ζ_n - общее число циклов и $\eta_n(1) \leq \eta_n(2) \leq \cdots \leq \eta_n(\zeta_n)$ - вариационный ряд длин циклов подстановки τ_n. Мы будем предполагать, что

$$p(n) \equiv \frac{|T_n(A)|}{n!} = n^{\varrho-1}L(n),\ n \in N, \tag{1}$$

где $\varrho > 0$ и последовательность $L(n)$ медленно меняется на бесконечности. Как известно [4], отсюда следует, что у множества A существует положительная асимптотическая плотность ϱ во множестве натуральных чисел, т.е.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|k:\ k \in A,\ k \leq n|}{n} = \varrho > 0. \tag{2}$$

Зафиксируем действительное x и положим при $m \in N$ и $t > 0$

$$r = \exp\left(\frac{m}{\varrho} + x\frac{\sqrt{m}}{\varrho}\right), \quad l(t) = \sum_{i\in A, i\leq t} 1/i.$$

Теорема 1 *Предположим, что выполнено (1), и пусть последовательность $m = m(n) \to \infty$ такова, что*

$$\frac{\varrho \ln n - m}{\sqrt{\ln n}} \to +\infty \quad (n \to \infty).$$

Тогда

$$\mathsf{P}\{\varrho \ln \eta_n(m) \leq m + x\sqrt{m}\}$$
$$= \Phi(z) + \frac{1}{405 l^{3/2}(r)}(10\Phi^{(3)})(z) + \Phi^{(5)}(z)) + O\left(\frac{1}{\ln^2(n)}\right)$$

*Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда №19-11-00111-П, https://rscf.ru/project/19-11-00111/ .

где

$$z = y - \frac{1}{108\mu}(y^3 - y),$$

$$y = 3\sqrt{\mu}\left(\left(\frac{\nu}{\mu}\right)^{1/3} - \frac{1}{9\mu} - 1\right),\ \mu = m + 1,\ \nu = l(r).$$

Здесь $\Phi(\cdot)$ - функция стандартного нормального распределения.

Рассмотрим некоторые примеры, когда выполнено (1). Наиболее ёмким из них является следующий.

Пример 1 *Предположим, что множество A не находится на решётке с шагом, большим 1 и у него существует положительная асимптотическая плотность во множестве натуральных чисел, равная ϱ, т.е., выполнено (2). Тогда имеет место (1).*

Пример 2 *Пусть $M \in N,\ 1 \le i \le M,\ A_i = \{m \in N:\ m = a_i k + b_i,\ k = 0, 1, 2, \dots\}$, где целые $a_i > 1,\ 1 \le b_i \le a_i - 1,\ (a_i, b_i) = 1,\ A = \bigcup_{i=1}^{M} A_i$, прогрессии A_i и A_j при $i \ne j$ не пересекаются.Тогда (см. работу А.И. Павлова [2]) выполнено (1).*

Пример 3 *Пусть $k_1, \dots, k_s \in N$ таковы, что:*

1. *$k_i \ge 2,\ i = 1, \dots, s$;*
2. *$(k_i, k_j) = 1$ при $i \ne j$.*

Положим $A = \{m \in N:\ k_i \nmid m,\ i = 1, \dots, s\}$. Тогда (см. работу А.И. Павлова [2]) выполнено (1).

Множества из примера 1 были рассмотрены в книге Тимашёва [3] (2016), а множества из примеров 2 и 3 введены в статье Болотникова, Сачкова и Тараканова [1] (1976). В этих работах исследовались некоторые другие свойства случайных подстановок с длинами циклов из этих множеств.

Список литературы

[1] Болотников Ю.В., Сачков В.Н., Тараканов В.Е. Асимптотическая нормальность некоторых величин, связанных с цикловой структурой случайных подстановок.- Матем. сб., 1976, т. 99, № 1, с. 121-133.

[2] Павлов А.И. О числе подстановок с длинами циклов из заданного множества, Дискрет. матем., 3:3 (1991), 109–123.

[3] Тимашев А.Н. Распределения типа степенного ряда и обобщенная схема размещения, Академия, М., 2016.

[4] Якымив А.Л. Распределение длины m-го максимального цикла случайной A-подстановки.- Дискретная математика, 2005, т. 17, № 4, с. 40-58.

Яровая Е.Б. (Москва, Россия). **Предельное поведение популяций частиц в ветвящемся случайном блуждании.**

Рассматриваются ветвящиеся случайные блуждания (ВСБ) по $\mathbb{Z}^d$, $d \in \mathbb{N}$, в которых точки размножения и гибели частиц, называют *источниками* ветвления. Предполагается независимость эволюции частиц друг от друга и от предыстории. Основное внимание уделяется асимптотическому анализу поведения расположенных в точке $y \in \mathbb{Z}^d$ субпопуляций $\mu(t,x,y)$ и популяций частиц $\mu(t,x) = \sum_{x\in\mathbb{Z}^d} \mu(t,x,y)$, порожденных частицей-прародительницей, находящейся при $t = 0$ в точке $x \in \mathbb{Z}^d$, их целочисленных моментов и условных математических ожиданий при $t \to \infty$ для ВСБ как с одним источником ветвления, так и с бесконечным числом источников, расположенных в каждой точке решетки. Если при $t = 0$ в каждой точке решетки находится по одной частице, закон размножения и гибели частиц описывается *критическим* марковским ветвящимся процессом в источниках ветвления. Для *критического* ВСБ, в основе которых лежит симметричное, неприводимое, *возвратное* случайное блуждание с переходными вероятностями $p(t,x,y)$, вырождение большинства субпопуляций приводит к "кластеризации" оставшихся частиц [1,2]. Для выжившей популяции при $t \to \infty$ имеем $\mathbf{E}[\mu(t,x)|\mu(t,x) > 0] \sim Ct$, а $\mathbf{E}[\mu(t,x,y)|\mu(t,x) > 0] \sim Ctp(t,x,y)$, где $C > 0$. Теперь предположим наличие на решетке лишь одного источника и одной начальной частицы при $t = 0$ в точке $x \in \mathbb{Z}^d$. Возникает вопрос о том, как изменится предельное поведение условных математических ожиданий, если все остальные предположения модели сохраняются. В этом случае $\mathbf{E}[\mu(t,x)|\mu(t,x) > 0] = \mathbf{P}^{-1}(\mu(t,x) > 0)$ и $\mathbf{E}[\mu(t,x,y)|\mu(t,x) > 0] = p(t,x,y)\mathbf{P}^{-1}(\mu(t,x) > 0)$. Результаты работ [3,4] о поведении моментов $\mu(t,x,y)$ и $\mu(t,x)$ позволяют доказать в этом случае следующую теорему.

Теорема 1 *Для критического возвратного ВСБ по $\mathbb{Z}^d$ с одним источником ветвления частиц при $\mu(0,x,y) = \delta_y(x)$ и $t \to \infty$ имеют место утверждения:*

а) если $p(t,x,y) \sim \gamma_d t^{-\frac{d}{2}}$, $\gamma_d > 0$, то

$$\mathbf{E}[\mu(t,x)|\mu(t,x) > 0] \sim K_d(x)v_d(t), \quad \mathbf{E}[\mu(t,x,y)|\mu(t,x) > 0] \sim K_d(x,y)v_d^*(t),$$

б) если $p(t,x,y) \sim h_{d,\alpha}\, t^{-\frac{d}{\alpha}}$, $h_{d,\alpha} > 0$, $\alpha \in [1,2)$, то

$$\mathbf{E}[\mu(t,x)|\mu(t,x) > 0] \sim V_{d,\alpha}(x)u_{d,\alpha}(t), \quad \mathbf{E}[\mu(t,x,y)|\mu(t,x) > 0] \sim V_{d,\alpha}(x,y)u_{d,\alpha}^*(t),$$

где $v_1(t) \sim t^{\frac{1}{4}}$, $v_1^*(t) \sim t^{-\frac{1}{4}}$, $v_2(t) = u_{1,1}(t) \sim \sqrt{\ln t}$, $v_2^*(t) = u_{1,1}(t)^* \sim \frac{\sqrt{\ln t}}{t}$, $u_{1,\alpha} \sim t^{\frac{\alpha-1}{2\alpha}}$, $u_{1,\alpha} \sim t^{\frac{\alpha-3}{2\alpha}}$, $\alpha \in (1,2)$.

Из этой теоремы видно, что для критического возвратного ВСБ с одним источником ветвления рост условных математических ожиданий популяций и субпопуляций частиц оказывается более медленным, чем при наличии таких же источников с одинаковыми интенсивностями размножения и гибели частиц в каждой точке решетки. При $p(t,x,y) \sim h_{\alpha,d}\, t^{-\frac{d}{\alpha}}$, $t \to \infty$, из-за бесконечной дисперсии скачков ВСБ по $\mathbb{Z}^1$ свойство возвратности блуждания "ослабевает" с уменьшением значения параметра α, а при $\alpha \in (0,1)$ блуждание становится невозвратным.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Balashova, D., Molchanov, S., Yarovaya, E.* Structure of the Particle Population for a Branching Random Walk with a Critical Reproduction Law, Methodol. Comput. Appl Probab., 2021, 23, pp. 85–102.

2. *Makarova Iu., Balashova D., Molchanov S., Yarovaya E.* Branching Random Walks with Two Types of Particles on Multidimensional Lattices, Mathematics, 2022, 10(6), pp.1–45.
3. *Rytova, A., Yarovaya E.* Survival analysis of particle populations in branching random walks, Communications in Statistics - Simulation and Computation, 2019, 50(10), pp. 3031-3045.
4. *Yarovaya, E.* Models of Branching Walks and Their Use in the Reliability Theory, Automation and Remote Control, 2010, 71(7), pp. 1308–1324.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант 20-01-00487).