Системы прямых и обратных нелинейных уравнений Колмогорова

Белопольская Я.И. [1]

Системы прямых и обратных параболических уравнений возникают в качестве математических моделей различных явлений в физике, химии, биологии и многих других. С точки зрения теории уравнений в частных производных основным различием между прямыми и обратными системами является тот факт, что системы прямых уравнений следует рассматривать как системы уравнений относительно мер (или их плотностей), тогда как системы обратных уравнений следует рассматривать как системы уравнений относительно функций. С вероятностной точки зрения это означает, что системы первого типа соответствуют прямым уравнениям Колмогорова [1], [2], а системы второго типа – обратным уравнениям Колмогорова [3], [4]. В докладе будут обсуждаться три варианта систем прямых уравнений Колмогорова, а именно система МГД-Бюргерс и система Брюсселятор, общий вид которых задается соотношением

$$\frac{\partial u_k}{\partial t} + div f(u) = \frac{\sigma_k^2}{2}\Delta u, \quad u_k(0,x) = u_{0k}(x), \tag{1}$$

а также нелинейные параболические системы с кросс-диффузией. Для этих систем будет построено вероятностное представление обобщенного решения задачи Коши в терминах соответствующих случайных процессов и их мультипликативных функционалов [1] – [2]. Наряду с этим будет показано, что задача Коши для этих систем допускает редукцию к системе стохастических соотношений, которые можно использовать для построения численных решений исходной задачи. В частности, для системы МГД- Бюргерс $f(u) = (u_1 u_2, \frac{u_1^2+u_2^2}{2})^*$, и стохастическая система, ассоциированная с этой системой, имеет вид

$$d\hat{\xi}_k(\theta) = -\sigma_k dw(\theta), \hat{\xi}_k(0) = x, \quad k = 1,2, \tag{2}$$

$$d\tilde{\eta}^k(\theta) = C_u^k(\hat{\xi}(\theta))\tilde{\eta}(\theta)dw(\theta), \tilde{\eta}^k(0) = 1, \tag{3}$$

$$u^k(t,x) = E[\tilde{\eta}^k(t)u_{0k}(\hat{\xi}). \tag{4}$$

Теорема 1. *1. Пусть существует регулярное обобщенное решение $u^k > 0$ задачи Коши для системы МГД-Бюргерс. Тогда это решение допускает вероятностное представление вида (4). 2. Пусть $u_{0k} > 0$ и $\nabla u_{0k} \in L^2$. Тога существует интервал $[0,T]$ такой, что для всех $t \in [0,T]$ существует единственное решение системы (2)–(4). При этом функция $u^k(t,x)$ вида (4) удовлетворяет в обобщенном смысле задаче Коши для системы МГД-Бюргерс.*

Мы обсудим также вероятностную интерпретацию задачи Коши для систем нелинейных параболических уравнений второго порядка с кросс-диффузией [3],[4].

Список литературы

[1] Белопольская Я.И., Степанова А.О. Стохастическая интерпретация системы МГД-Бюргерс. Записки научн. сем. ПОМИ т. 466 Вероятность и статистика 26 (2017). 7–29.

[2] Белопольская Я.И., Стохастическая интерпретация квазилинейных параболических систем с кросс-диффузией ТВиП т.61, N 2 (2016) 268–299.

[3] Belopolskaya Ya. Probabilistic counterparts for strongly coupled parabolic systems Springer Proceedings in Mathematics & Statistics. Topics in Statistical Simulation. v 114. P. 33–42.

[4] Белопольская Я.И., Вероятностные модели законов сохранения и баланса в режимах с переключениями Записки семинаров ПОМИ. т.454 (2016) 5–43.

[1] Работа поддержана грантом РНФ 17-11-01136, ПОМИ РАН