Гущин А.А. (Москва, Россия). **Совместные распределения возрастающих процессов и их компенсаторов, мартингалы с одним скачком и вложение Скорохода.**

Обозначим $\mathbb{W}^*$ класс борелевских вероятностных мер $\mu = \mu(dx, dy)$ на $\mathbb{R}^2_+$, удовлетворяющих соотношениям

$$\int x\,\mu(dx,dy) = \int y\,\mu(dx,dy) \quad \text{и} \quad \int_{\{y\leqslant\lambda\}} x\,\mu(dx,dy) \leqslant \int (y\wedge\lambda)\,\mu(dx,dy) \quad \forall\lambda\geqslant 0.$$

Если, дополнительно, в неравенствах для всех $\lambda \geqslant 0$ имеет место равенство, то соответствующий класс обозначается $\mathbb{W}^*_e$.

Напомним, что для возрастающего процесса $A = (A_t)_{t\geqslant 0}$ семейство случайных величин $C_t = \inf\{s \geqslant 0\colon A_s > t\}$ есть замена времени, порожденная A. Для прогрессивно измеримого процесса X корректно определен процесс с заменой времени $X\circ C = (X_{C_t})_{t\geqslant 0}$, если X_t сходится п.н. к конечному пределу X_∞ при $t \to \infty$ на множестве $\{A_\infty < \infty\}$.

Мартингалы с одним скачком понимаются здесь в узком смысле, а именно, назовем процесс $M = (M_t)_{t\geqslant 0}$ мартингалом с одним скачком, если он имеет вид

$$M_t = W \wedge t - V\mathbf{1}_{\{t\geqslant W\}},$$

где пара случайных величин (V, W) имеет совместное распределение из $\mathbb{W}^*_e$. Легко доказать, что тогда, действительно, M — мартингал (например, относительно порождаемой им фильтрации). Заметим, что процесс $A_t := W\wedge t$ непрерывен и, стало быть, предсказуем, поэтому является компенсатором возрастающего процесса $X_t := V\mathbf{1}_{\{t\geqslant W\}}$.

Исходным результатом для дальнейшего анализа является слелующее предложение.

Предложение 1 ([1]) *Пусть X — неотрицательный локальный субмартингал с разложением Дуба–Мейера $X = M + A$, $X_0 = M_0 = A_0 = 0$. Если $\mathbf{P}(A_\infty < \infty) = 1$, то X_t п.н. сходится к конечному пределу X_∞ при $t\to\infty$ и $\mathrm{Law}(X_\infty, A_\infty) \in \mathbb{W}^*$, причем $\mathrm{Law}(X_\infty, A_\infty) \in \mathbb{W}^*_e$ тогда и только тогда, когда $(X - A)\circ C$ — мартингал с одним скачком, где C — замена времени, порожденная A.*

В частности, если N — такой локальный мартингал, что $N_0 = 0$, текущий максимум $\overline{N}_t := \sup_{s\leqslant t} N_s$ непрерывен и $\mathbf{P}(\overline{N}_\infty < \infty) = 1$, то $\mathrm{Law}(\overline{N}_\infty - N_\infty, \overline{N}_\infty) \in \mathbb{W}^*$. Более того, для любой $\mu \in \mathbb{W}^*_e$, очевидно, существует мартингал M с одним скачком, для которого $\mathrm{Law}(\overline{M}_\infty - M_\infty, \overline{M}_\infty) = \mu$. Таким образом, для любого локального мартингала, удовлетворяющего указанным выше условиям и такого, что $\mathrm{Law}(\overline{N}_\infty - N_\infty, \overline{N}_\infty) \in \mathbb{W}^*_e$, найдется мартингал M с одним скачком, у которого совместное распределение $\mathrm{Law}(M_\infty, \overline{M}_\infty)$ совпадает с $\mathrm{Law}(N_\infty, \overline{N}_\infty)$. С другой стороны, вкладывая этот мартингал M в броуновское движение в соответствии с первой теоремой Монро, можно построить такое вложение Скорохода τ, т.е. броуновское движение B и минимальный момент остановки τ, что совместное распределение $\mathrm{Law}(B_\tau, \overline{B}_\tau)$ будет тем же самым.

Возникает естественный вопрос, а существуют ли аналогичные представления для распределений из $\mathbb{W}^*$? Оказывается, для любой меры $\mu \in \mathbb{W}^*$ можно построить такой локально интегрируемый возрастающий процесс X с непрерывным компенсатором A, что $\mathrm{Law}(X_\infty, A_\infty) = \mu$. Однако выбрать возрастающий процесс X так, что он будет иметь не более одного скачка, можно тогда и только тогда, когда

$$\int (x-y)^+\,\mu(dx,dy) \geqslant \int (y-x)^+\,\mu(dx,dy).$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Гущин А.А.* Совместное распределение терминальных значений неотрицательного субмартингала и его компенсатора, Теория вероятн. и ее примен., 2017, т. 62, № 2, с. 267–291.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 14-21-00162).