

Холево А. С. (Москва, Россия) — Квантовые динамические полугруппы: нестандартные генераторы, стохастические представления.

Квантовые динамические полугруппы являются некоммутативным аналогом (суб-) марковских полугрупп в классической теории вероятностей: последние являются полугруппами положительных, нормированных отображений в функциональных пространствах, тогда как первые – полугруппами соответствующих отображений в операторных алгебрах [1]. Эти полугруппы удовлетворяют *марковским управляющим уравнениям* (м.у.у.) – некоммутативному обобщению уравнений Колмогорова-Чепмена.

Пусть K, L_j - линейные операторы, определенные на плотной области \mathcal{D} гильбертова пространства \mathcal{H} , удовлетворяющие условию

$$\sum_j \|L_j\psi\|^2 \leq 2\operatorname{Re} \langle \psi | K | \psi \rangle, \quad \psi \in \mathcal{D}, \quad (1)$$

в частности, K является аккретивным. Мы предполагаем, что K максимальный аккретивный оператор. Тогда существует единственное минимальное решение $T_t, t \geq 0$, задачи Коши для *обратного* квантового м.у.у.

$$\frac{d}{dt} \langle \varphi | T_t[X] | \psi \rangle = \sum_j \langle L_j \varphi | T_t[X] | L_j \psi \rangle - \langle K \varphi | T_t[X] | \psi \rangle - \langle \varphi | T_t[X] | K \psi \rangle, \quad (2)$$

где $\varphi, \psi \in \mathcal{D}, X \in \mathfrak{L}(\mathcal{H})$, удовлетворяющее условию $T_0[X] = X$, которое является динамической полугруппой на алгебре $\mathfrak{L}(\mathcal{H})$ ограниченных операторов в \mathcal{H} , см. [2].

Если, дополнительно, L_j замыкаемы и удовлетворяют условию $\sum_j \|L_j^* \psi\|^2 < \infty$ для $\psi \in \mathcal{D}^*$, где \mathcal{D}^* – существенная область для K^* , то предсопряженная полугруппа $S_t^0 = (T_t)_*$ является минимальным решением *прямого* м.у.у.

$$\frac{d}{dt} \langle \varphi | S_t^0[\omega] | \psi \rangle = \sum_j \langle L_j^* \varphi | S_t^0[\omega] | L_j^* \psi \rangle - \langle K^* \varphi | S_t^0[\omega] | \psi \rangle - \langle \varphi | S_t^0[\omega] | K \psi \rangle, \quad (3)$$

где $\varphi, \psi \in \mathcal{D}^*, \omega \in \mathfrak{T}(\mathcal{H})$, а $\mathfrak{T}(\mathcal{H}) = \mathfrak{L}(\mathcal{H})_*$ – банахово пространство ядерных операторов ω в \mathcal{H} . Имеет место классическое вероятностное представление

$$\langle \varphi | T_t[X] | \psi \rangle = \mathbb{M} \langle \varphi(t) | X | \psi(t) \rangle$$

через решения в смысле *слабой топологии* стохастического интегрального уравнения

$$\psi(t) = \psi + \int_0^t \sum_j L_j \psi(s) dW_j(s) - \int_0^t K \psi(s) ds,$$

где $W_j(t); j = 1, \dots$ независимые стандартные винеровские процессы [2].

Полугруппа называется *стандартной*, если она является минимальным решением обратного м.у.у., как указано выше. Мы рассмотрим два примера, полученные сингулярными возмущениями генератора стандартной полугруппы [3]. Во-первых, мы опишем обобщение примера работы [4] стандартной полугруппы, для которой не выполняется прямое м.у.у. Во-вторых, мы дадим усовершенствованную конструкцию нестандартной динамической полугруппы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Холево А. С. Статистическая структура квантовой теории, ИКИ, Москва-Ижевск, 2003.
2. Holevo A. S. On dissipative stochastic equations in a Hilbert space, Probab. Theory Rel. Fields, 1996, vol. 104, pp. 483-500.
3. Holevo A. S. On singular perturbations of quantum dynamical semigroups, Math. Notes, 2018, vol. 103, № 1, pp. 133–144.
4. Arveson W. The domain algebra of a CP-semigroup, Pacific. J. Math., 2002, vol. 203, № 1, pp. 67-77.

Данная работа выполнена в рамках госзадания МИАН.