Смородина Н.В. (ПОМИ РАН, Санкт-Петербург, Россия). **Аппроксимация оператора эволюции математическими ожиданиями функционалов от точечных пуассоноских полей.**

Рассмотрим оператор $H = -\frac{1}{2}\,\frac{d^2}{dx^2} + V(x)$, заданный на области определения $W_2^2(\mathbb{R})$. Потенциал V будет предполагаться вещественным и ограниченным, что влечет самосопряженность оператора H. В этом случае семейство операторов e^{-itH} образует группу унитарных операторов в $L_2(\mathbb{R})$. Оператор e^{-itH} переводит функцию $\varphi \in W_2^2(\mathbb{R})$ в решение $u(t,x)$ задачи Коши для уравнения Шрёдингера $i\,\frac{\partial u}{\partial t} = Hu$ с начальной функцией $u(0,x) = \varphi(x)$ (подробнее см.[1]). Известно, что для уравнения теплопроводности $\frac{\partial u}{\partial t} = -Hu$ решение задачи Коши с начальной функцией $u(0,x) = \varphi(x)$ допускает вероятностное представление в виде математического ожидания функционала от винеровского процесса (формула Фейнмана-Каца), именно

$$u(t,x) = e^{-tH}\varphi(x) = \mathbf{E}\big[\varphi(x + w(t))e^{-\int_0^t V(x+w(\tau))\,d\tau}\big],$$

где $w(t)$ – стандартный винеровский процесс. Последняя формула означает, что эволюцию начальной функции φ под действием оператора теплопроводности e^{-tH} можно моделировать методами статистики, для этого достаточно иметь возможность генерировать траектории винеровского процесса.

В настоящем докладе близкий по идеологии подход будет развит для оператора e^{-itH}. А именно, будет построено семейство Q_ε^t операторов в $L_2(\mathbb{R})$, зависящих еще от дополнительного параметра $\varepsilon > 0$ и обладающее следующими свойствами:

1) для каждого $\varepsilon > 0$ семейство Q_ε^t является полугруппой, то есть $Q_\varepsilon^{t+s} = Q_\varepsilon^t Q_\varepsilon^s$,

2) операторная норма оператора Q_ε^t не больше единицы,

3) оператор Q_ε^t задается как математическое ожидание функционала от некоторого точечного случайного поля,

4) при $\varepsilon \to 0$ операторы Q_ε^t аппроксимируют оператор e^{-itH} в смысле сильной операторной сходимости, то есть для любого $\varphi \in L_2(\mathbb{R})$ при $\varepsilon \to 0$ имеет место сходимость $\|Q_\varepsilon^t\varphi - e^{-itH}\varphi\|_2 \longrightarrow 0$.

Также, как и в случае теплопроводности, этот подход дает возможность, генерируя реализации точечного случайного поля, моделировать методами статистики эволюцию волновой функции. Отметим еще, что квадрат модуля волновой функции всегда является плотностью вероятностного распределения. Эволюция волновой функции порождает соответствующую эволюцию плотности вероятностного распределения, в литературе такую эволюцию плотности распределения называют еще «квантовым случайным блужданием» Предложенный подход, в частности, обеспечивает теоретическую возможность моделирования «квантового случайного блуждания» классическими вероятностно-статистическими методами. Частный случай вышеописанной конструкции (при $V = 0$) изложен в работе [2].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Glimm J., Jaffe A.* Quantum Physics. A Functional Integral Point of View, Springer-Verlag, New York Heidelberg Berlin, 1987.
2. *Ибрагимов И.А., Смородина Н.В., Фаддеев М.М.* Об одной предельной теореме, связанной с вероятностным представлением решения задачи Коши для уравнения Шрёдингера, Зап. научн. семин. ПОМИ, 2016, т.454, стр. 158-176.

Работа выполнена в ПОМИ РАН при поддержке РНФ (грант № 17-11-01136).