Ульянов В.В. (Москва, Россия). – **Неасимптотические оценки близости гауссовских мер по шарам.**

В докладе дан обзор точных неасимптотических оценок для расстояния Колмогорова между вероятностями попадания гауссовских случайных элементов в шары гильбертового пространства. Отличительной чертой этих оценок является их независимость от размерности, а зависимость от ядерной нормы разности ковариационных операторов гауссовских элементов и нормы сдвига. Полученные результаты заметно улучшают оценки, построенные с помощью неравенства Пинскера в терминах расстояния Кульбака–Лейблера. Также получены оценки анти-концентрации для квадрата нормы нецентрированного гауссовского элемента в гильбертовом пространстве. Представлен ряд примеров по приложению результатов в статистических выводах и в ЦПТ в пространствах высокой размерности (см.,напр., [1]). Формулировки и доказательства приводимых результатов см. в [2–6], а также на моих страницах в MathNet.ru и ResearchGate.net. Здесь мы приведем два основных результата из [4] и [5].

Пусть H – действительное сепарабельное гильбертово пространство с нормой $||\cdot||$.

Теорема 1 *Пусть ξ и η суть гауссовские элементы в H, имеющие нулевые средние и ковариационные операторы Σ_ξ и Σ_η соотв. Пусть $\lambda_{1\xi} \ge \lambda_{2\xi} \ge \dots$ и $\lambda_{1\eta} \ge \lambda_{2\eta} \ge \dots$ – собственные значения Σ_ξ и Σ_η соотв. Тогда существует абсолютная постоянная C такая, что при $\Lambda_{k\xi}^2 := \sum_{j=k}^{\infty} \lambda_{j\xi}^2$, $\Lambda_{k\eta}^2 := \sum_{j=k}^{\infty} \lambda_{j\eta}^2$, $k = 1, 2$, имеем*

$$\sup_{x>0} |P(\|\xi\| \le x) - P(\|\eta\| \le x)| \le C \left((\Lambda_{1\xi}\Lambda_{2\xi})^{-1/2} + (\Lambda_{1\eta}\Lambda_{2\eta})^{-1/2} \right) \sum_{i=1}^{\infty} |\lambda_{i\xi} - \lambda_{i\eta}|.$$

В доказательстве теоремы 1 важную роль играет следующая оценка плотности $p(x)$ случайной величины $\|\xi\|^2$.

Лемма 1 *Пусть ξ – гауссовский случайный элемент в сепарабельном гильбертовом пространстве H с нулевым средним и ковариационным оператором Σ_ξ. Тогда при некоторой постоянной c справедливо неравенство*

$$\max_{x \ge 0} p(x) \le c\,(\Lambda_{1\xi}\Lambda_{2\xi})^{-1/2}. \tag{1}$$

Если «эффективная» размерность Σ_ξ не меньше двух, т.е. если $2\,\lambda_{1\xi}^2 \le \Lambda_{1\xi}^2$, то $\Lambda_{1\xi} \approx \Lambda_{2\xi}$ и правая часть (1) обратно пропорциональна норме Фробениуса $\Lambda_{1\xi}$ для Σ_ξ. В частности, в d-мерном случае $H = R^d$ с $d \ge 2$, если Σ_ξ близко к единичной матрице I, то в силу (1) имеем $\max_{x \ge 0} p(x) \le c\,d^{-1/2}$, что согласуется с максимумом плотности хи-квадрат распределения с d степенями свободы.

REFERENCES

1. *Prokhorov Yu.V., Ulyanov V.V.* Some approximation problems in statistics and probability, in: Limit theorems in probability, statistics and number theory, Springer Proc. Math. Stat., Springer, Heidelberg, 2013, vol. 42, pp. 235–249.
2. *Barsov S.S., Ulyanov V.V.* Difference of Gaussian measures, Journal of Soviet Mathematics, 1987, vol. 38, no 5, pp. 2191—2198.
3. *Кристоф Г., Прохоров Ю.В., Ульянов В.В.* О распределении квадратичных форм от гауссовских случайных величин, Теория вероятн.и примен., 1995, т. 40, № 2, с. 301—312.
4. *Götze F., Naumov A., Spokoiny V., Ulyanov V.* Large ball probabilities, Gaussian comparison and anti-concentration, 2018, arXiv:1708.08663v2, version 2.
5. *Наумов А., Спокойный В., Тавыриков Ю., Ульянов В.* Неасимптотические оценки близости гауссовских мер по шарам, Доклады РАН, 2018 (в печати).
6. *Naumov A., Spokoiny V., Ulyanov V.* Bootstrap confidence sets for spectral projectors of sample covariance, 2017, arXiv:1703.00871.

Исследование финансировалось в рамках государственной поддержки ведущих университетов Российской Федерации "5-100".