

Тихов М.С. (ННГУ, Нижний Новгород, Россия) Фурье-метод рекурсивного оценивания функции распределения в зависимости «доза-эффект».

Пусть $\mathcal{U}^{(n)} = \{(U_1, W_1), \dots, (U_n, W_n)\}$ есть независимые и одинаково распределенные пары случайных величин, где U_i интерпретируется как «доза», а $W_j = I(X_j < U_j)$ – индикатор события ($X_j < U_j$), как «эффект»; случайные величины $\{X_j\}_{j=1}^n$ имеют общую функцию распределения (ф.р.) $F(x) = \mathbf{P}(X_j < x)$ с плотностью $f(x)$, функция распределения $G(u) = \mathbf{P}(U_j < u)$ имеет плотность распределения $g(u)$ по лебеговой мере λ на прямой \mathbf{R} . Требуется по выборке $\mathcal{U}^{(n)}$ оценить неизвестную ф.р. $F(x)$ или её квантили, функция распределения $G(u)$ также неизвестна. Данная модель интерпретируется как зависимость «доза-эффект» [1-3].

В качестве оценки функции распределения $F(x)$ возьмем

$$\hat{F}_n(x) = S_{2,n}(x)/S_{1,n}(x), \text{ где } S_{2,n}(x) = \sum_{j=1}^n W_j K_{b_j}(x, U_j)/n, \quad S_{1,n}(x) = \sum_{j=1}^n W_j K_{b_j}(x, U_j)/n, \quad (1)$$

$K_b(x, u) = K((x - u)/b)/b$, $K(x)$ – это ядерная функция (финитная симметричная плотность распределения) $\{b_j\}_{j=1}^n$ – последовательность сглаживающих параметров.

Метод доказательства основан на рекурсивном представлении оценок $\hat{F}_n(x)$ и $\hat{g}_n(x)$:

$$\hat{g}_n(x) = S_{1,n}(x) = \hat{g}_{n-1}(x) + n^{-1}[K_{b_n}(x, U_n) - \hat{g}_{n-1}(x)],$$

$$\hat{F}_n(x) = \hat{F}_{n-1}(x) + \gamma_n[W_n - \hat{F}_{n-1}(x)], \quad \gamma_n = \gamma_n(x) = (\hat{g}_n(x)n)^{-1}K_{b_n}(x, U_n).$$

Пусть $B_n = \sum_{j=1}^n b_j^{-1}$. При некоторых условиях регулярности на $g(x)$ и $f(x)$ и условиях ([4], p.184-185): **(D1)** $b_n \rightarrow 0$, $n^2 B_n^{-1} \rightarrow \infty$, и **(D2)** $\min_{1 \leq j \leq n} b_j = o(B_n)$ при $n \rightarrow \infty$, последовательность $n B_n^{-1/2}(\hat{F}_n(x_0) - \mathbf{E}(\hat{F}_n(x_0)))$ будет асимптотически нормальной $N(0, F(x_0)(1 - F(x_0))\|K\|^2/g(x_0))$.

Рассмотрена также задача оценивания функции распределения $F(x)$ в модели свертки с использованием Фурье-метода, а также оценивания распределений с использованием теории репродуцированных ядер.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Криштопенко С.В., Тихов М.С., Попова Е.Б. Доза-эффект. – М.: Медицина, 2008. – 285 с.
2. Tikhov M.S. Statistical Estimation on the Basis of Interval-Censored Data. – J. Math. Sci., 2004, v.119, no.3, p.321-335.
3. Tikhov M., Ivkin M. A new Yang-type estimator of Distribution Function at Quantal Response over Indirect Data. – Journal Wseas Transactions on Mathematics, Vol. 13, 2014, pp. 684-693.
4. Hájek J., Šidák Z., Sen P.K. Theory of Rank Tests. – NY: Academic Press, 1999. – 435 p.