Белопольская Я.И. (Санкт-Петербург, Россия). **Системы нелинейных прямых уравнений Колмогорова**

Наша цель – вывести замкнутые системы стохастических уравнений для диффузионных процессов, ассоциированных с системами квазилинейных параболических уравнений с кросс-диффузией [1]-[3]. При этом рассматриваемые параболические уравнения интерпретируются как прямые уравнения Колмогорова и выводятся формулы типа формулы Фейнман-Каца для вероятностных представлений слабых решений задачи Коши для этих параболических уравнений. Общая теория иллюстрируется на примере задачи Коши для простейшей системы магнитогидродинамики

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \cdot \nabla v = \frac{\sigma^2}{2}\Delta v + (\nabla \times B) \times B, \quad v(0, y) = v_0(y) \in R^3, \tag{1}$$

$$\frac{\partial B}{\partial t} = \frac{\mu^2}{2}\Delta B + \nabla \times (v \times B), \quad B(0, y) = B_0(y) \in R^3, \quad y \in R^3, t \in [0, T]. \tag{2}$$

Здесь v – скорость проводящей жидкости, B - напряженность магнитного поля Пусть $w_m(t)$ – независимые винеровские процессы, ξ_{0m} - случайные величины с распределениями $u_{0m}(dy)$, независящие от $w_m(t)$, $u_{0m}(dy) = u_{0m}(y)dy$ $u_{0m} = v_{0m}, m = 1, 2, 3$, $u_{0m} = B_{0m}, m = 4, 5, 6$.

Зададим случайные процессы $\xi_m(t), \eta_m(t)$ соотношениями

$$\xi^m(t) = \xi_{0m} + \sigma w_m(t), m = 1, 2, 3, \quad \xi_m(t) = \xi_{0m} + \mu w_m(t), m = 4, 5, 6, \tag{3}$$

$$\eta_m(t) = 1 + \int_0^t c_m(u(\theta, \xi_m(\theta)), \nabla u(\theta, \xi_m(\theta)))\eta_m(\theta)d\theta, \tag{4}$$

$u = (u_1, \ldots, u_6)$, $u_m = v_m, m = 1, 2, 3, \quad u_m = B_m, m = 4, 5, 6,$

$$\int_{R^d} h_m(y)u_m(t, dy) = E\left[h_m(\xi_m(t))\eta_m(t)\right], \quad m = 1, \ldots, 6, \tag{5}$$

и коэффициенты $c_m : R^6 \times (R^6 \otimes R^3) \to R$ определяются из соотношений (1), (2). В силу теоремы Рисса соотношение (5) можно заменить соотношением

$$u_m(t, y) = \int_{R^d} p_m(0, x, t, y)u_{0m}(x)dx + \int_0^t \int_{R^d} \tilde{c}^u_m(t, z)p_m(\theta, z, t, y)u_m(\theta, z)dzd\theta, \tag{6}$$

где $p_m(0, x, t, y)$ – плотности переходных вероятностей процессов $\xi_m(t)$, $\tilde{c}^u_m(t, z) = c_m(u(t, z), \nabla u(t, z))$ и $u_m(t, dy) = u_m(t, y)dy$.

Теорема 1. *Пусть* $u_{0m} \in W^{1,1}(R^3)$. *Тогда существует единственное решение стохастической системы (3),(4), (6) определенное на некотором интервале* $[0, T]$ *и функции* $u_m \in L^1([0, T], W^{1,1}(R^d)) \cap L^1([0, T], L^\infty(R^d))$ *определяют единственное ослабленное решение задачи Коши (1),(2).*

В одномерном случае аналогичный результат получен в работе [1].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Belopolskaya Ya.* Stochastic models for nonlinear cross-diffusion systems, Statistics and Simulation, PROMS 2018, vol. 231, pp. 145–159.
2. *Белопольская Я.И.* Стохастическая интерпретация квазилинейных параболических систем с кросс-диффузией. ТВиП 2016, т. 61 N 2, с. 268–299.
3. *Belopolskaya Ya.I.* Probabilistic counterparts of nonlinear parabolic PDE systems. Modern Stochastics and Applications – Springer Optimization and Its Applications, 2014, vol. 90, pp. 71–94.
4. *Белопольская Я.И., Степанова А.О.* Стохастическая интерпретация системы МГД- Бюргерс. Записки научн. сем. ПОМИ 2017, т. 466, с. 7–29.

Работа выполнена при поддержке РНФ (грант 17-11-01136).