

Гликлик Ю.Е. (Воронеж, Россия). **Стохастические уравнения с текущими скоростями и с осмотическими скоростями (производные в среднем).**

Предварительные сведения о производных в среднем, в частности, о текущих скоростях (симметрических производных в среднем D_S), осмотических скоростях (антисимметрических производных в среднем D_A) и квадратических производных в среднем D_2 можно найти в [1].

Пусть диффузионный коэффициент, т.е. поле симметрических матриц $(a^{ij}(x))$, гладко, автономно и положительно определено. Так как все матрицы $(a^{ij}(x))$ не вырождены и поле гладко, существует гладкое поле обратных симметрических и положительно определенных матриц (α_{ij}) . Это поле может быть использовано как новая риманова метрика $\alpha(\cdot, \cdot) = \alpha_{ij} dx^i \otimes dx^j$ на \mathbb{R}^n . Форма объема метрики $\alpha(\cdot, \cdot)$ имеет вид $\Lambda_\alpha = \sqrt{\det(\alpha_{ij}(x))} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$.

Обозначим символом $\rho(t, x)$ плотность вероятностного распределения случайного элемента $\xi(t)$ относительно формы объема $dt \wedge \Lambda_\alpha$ на $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, т.е. для любой непрерывной ограниченной функции $f : [0, T] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ выполняется соотношение $\int_0^T E(f(t, \xi(t))) dt = \int_0^T \left(\int_{\Omega} f(t, \xi(t)) d\mathbb{P} \right) dt = \int_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n} f(t, x) \rho(t, x) dt \wedge \Lambda_\alpha$.

Пусть на \mathbb{R}^n заданы борелевское векторное поле $v(t, x)$ и борелевское поле симметрических неотрицательно определенных матриц $\alpha(t, x)$. Система вида

$$\begin{cases} D_S \xi(t) = v(t, \xi(t)), \\ D_2 \xi(t) = \alpha(t, \xi(t)), \end{cases} \quad (1)$$

называется уравнением первого порядка с текущими скоростями.

Везде далее поля v и α гладкие и все матрицы $\alpha(x)$ автономны и положительно определены. Если $v(t, x)$, $\alpha(x)$ и частные производные коэффициентов (a^{ij}) удовлетворяют неравенству Ито и плотность ρ начального значения гладка и нигде не равна нулю, доказано, что (1) имеет решение (см. [2]).

Лемма 1 Пусть $\rho(t, x)$, $v(t, x)$, $\alpha(x)$ и Λ_α такие же, как выше, и решение (1) существует. Тогда поток векторного поля $(1, v(t, x))$ на $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ сохраняет форму объема $\rho(t, x) dt \wedge \Lambda_\alpha$, т.е. производная Ли $L_{(1, v(t, x))} \rho(t, x) dt \wedge \Lambda_\alpha = 0$.

Определение 1 Система вида

$$\begin{cases} D_A \xi(t) = u(t, \xi(t)) \\ D_2 \xi(t) = \alpha(\xi(t)) \end{cases}, \quad (2)$$

где $u(t, x)$ – борелевское векторное поле, а α – как выше, называется дифференциальным уравнением первого порядка с осмотическими скоростями.

Используя свойства осмотических скоростей и квадратических производных, а также теорему Стокса, можно найти $\rho(t, x)$ для решения (2). Введем $p(t, x) = \log \rho(t, x)$.

Условие 1. Мы предполагаем, что при всех $t \in [0, T]$ интеграл $\int_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n} e^{p(t, x)} dt \wedge \Lambda_\alpha$ конечен, т.е., равен некоторой конечной константе $C(t)$, которая C^∞ гладка по t .

Теорема 1 Если Условие 1 выполнено, при сделанных выше предположениях уравнение (2) имеет решение для любого начального значения, у которого плотность гладкая и нигде не равна нулю.

Доказательство использует Лемму 1 при нахождении текущей скорости решения,

1. *Gliklikh Yu.E.* Global and stochastic analysis with applications to mathematical physics.- London: Springer-Verlag.- 2011.- 460 pp.
2. *Азарина С.В., Гликлик Ю.Е.* О разрешимости неавтономных стохастических дифференциальных уравнений с текущими скоростями, Математические заметки, 2016, т. 100, № 1, с. 3 – 10.