Гликлих Ю.Е. (Воронеж, Россия). **Стохастические уравнения с текущими скоростями и с осмотическими скоростями (производные в среднем).**

Предварительные сведения о производных в среднем, в частности, о текущих скоростях (симметрических производных в среднем D_S), осмотических скоростях (антисимметрических производных в среднем D_A) и квадратических производных в среднем D_2 можно найти в [1].

Пусть диффузионный коэффициент, т.е. поле симметрических матриц $(a^{ij}(x))$, гладко, автономно и положительно определено. Так как все матрицы $(\alpha^{ij}(x))$ не вырождены и поле гладко, существует гладкое поле обратных симметрических и положительно определенных матриц (α_{ij}). Это поле может быть использовано как новая риманова метрика $\alpha(\cdot,\cdot) = \alpha_{ij}dx^i \otimes dx^j$ на $\mathbb{R}^n$. Форма объема метрипки $\alpha(\,\cdot\,,\cdot\,)$ имеет вид $\Lambda_\alpha = \sqrt{\det(\alpha_{ij}(x))}\,dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n$.

Обозначим символом $\rho(t,x)$ плотность вероятностного распределения случайного элемента $\xi(t)$ относительно формы объема $dt\wedge\Lambda_\alpha$ на $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$, т.е. для любой непрерывной ограниченной функции $f:[0,T]\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ выполняется соотношение $\int_0^T E(f(t,\xi(t)))\,dt = \int_0^T \left(\int_\Omega f(t,\xi(t))d\mathbb{P}\right) dt = \int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n} f(t,x)\rho(t,x)dt\wedge\Lambda_\alpha$.

Пусть на $\mathbb{R}^n$ заданы борелевское векторное поле $v(t,x)$ и борелевское поле симметрических неотрицательно определенных матриц $\alpha(t,x)$. Система вида

$$\begin{cases} D_S\xi(t) = v(t,\xi(t)), \\ D_2\xi(t) = \alpha(t,\xi(t)), \end{cases} \tag{1}$$

называется уравнением первого порядка с текущими скоростями.

Везде далее поля v и α гладкие и все матрицы $\alpha(x)$ автономны и положительно определены. Если $v(t,x)$, $\alpha(x)$ и частные производные коэффициентов (a^{ij}) удовлетворяют неравенству Ито и плотность ρ начального значения гладка и нигде не равна нулю, доказано, что (1) имеет решение (см. [2]).

Лемма 1 *Пусть $\rho(t,x)$, $v(t,x)$, $\alpha(x)$ и Λ_α такие же, как выше, и решение (1) существует. Тогда поток векторного поля $(1,v(t,x))$ на $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$ сохраняет форму объема $\rho(t,x)dt\wedge\Lambda_\alpha$, т.е. производная Ли $L_{(1,v(t,x))}\rho(t,x)dt\wedge\Lambda_\alpha = 0$.*

Система вида

$$\begin{cases} D_A\xi(t) = u(t,\xi(t)) \\ D_2\xi(t) = \alpha(\xi(t)) \end{cases}, \tag{2}$$

где $u(t,x)$ – борелевское векторное поле, а α – как выше, называется дифференциальным уравнением первого порядка с осмотическими скоростями.

Используя свойства осмотических скоростей и квадратических производных, а также теорему Стокса, можно найти $\rho(t,x)$ для решения (2). Введем $p(t,x) = \log\rho(t,x)$.

Условие 1. *Мы предполагаем, что при всех $t\in[0,T]$ интеграл $\int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n} e^{p(t,x)}dt\wedge\Lambda_\alpha$ конечен, т.е., равен некоторой конечной константе $C_{(t)}$, которая C^∞ гладка по t.*

Теорема 1 *Если Условие 1 выполнено, при сделанных выше предположениях уравнение (2) имеет решение для некоторого начального значения, у которого плотность гладкая и нигде не равна нулю и зависит от правой части. Это решение не единственно.*

Доказательство использует Лемму 1 при нахождении текущей скорости решения,

1. *Gliklikh Yu.E.* Global and stochastic analysis with applications to mathematical physics.- London: Springer-Verlag.- 2011.- 460 pp.
2. *Азарина С.В, Гликлих Ю.Е.* О разрешимости неавтономных стохастических дифференциальных уравнений с текущими скоростями, Математические заметки, 2016, т. 100, № 1, с. 3 – 10.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант 18-01-00048).