Гущин А.А. (Москва, Россия). **Совместное распределение максимума и терминального значения макс-непрерывного локального субмартингала.**

В 1993 году К. Роджерс [1] охарактеризовал класс всех возможных совместных распределений терминального значения случайного процесса и его максимума для двух семейств процессов — равномерно интегрируемых мартингалов и п.н. сходящихся непрерывных локальных мартингалов, выходящих из 0. Оказывается, что во втором случае можно и естественно расширить семейство процессов с сохранением соответствующего класса совместных распределений. А именно, рассмотрим совокупность $\mathscr{X}$ всех п.н. сходящихся непрерывных справа локальных субмартингалов $X = (X_t)_{t\geqslant 0}$, $X_0 = 0$, у которых процесс текущего максимума $\overline{X}_t := \sup_{s\leqslant t} X_s$ непрерывен (такие процессы иногда называют макс-непрерывными). В докладе обсуждаются следующие вопросы: 1) описание класса совместных распределений $\mathrm{Law}(X_\infty, \overline{X}_\infty)$ терминального значения X_∞ процесса и его глобального максимума $\overline{X}_\infty$, когда X пробегает всю совокупность $\mathscr{X}$; 2) построение для каждой меры μ из этого класса того или иного "простого" представителя X из $\mathscr{X}$ с $\mathrm{Law}(X_\infty, \overline{X}_\infty) = \mu$. Из теоремы Роджерса следует, что всегда найдется непрерывный локальный мартингал с таким свойством. Мы предлагаем альтернативное доказательство этого факта. Второй вопрос интересен еще и потому, что, как мы доказываем, будет ли процесс X из $\mathscr{X}$ замкнутым субмартингалом, или замкнутым супермартингалом, или равномерно интегрируемым мартингалом зависит только от совместного распределения $\mathrm{Law}(X_\infty, \overline{X}_\infty)$.

Предложение 1 *Для процесса X из $\mathscr{X}$ определим замену времени $C_s := \inf\{t : \overline{X}_t > s\}$. Тогда процесс $Y := X \circ C := (X_{C_s})_{s\geqslant 0}$ является макс-непрерывным субмартингалом относительно фильтрации $(\mathscr{F}_{C_s})_{s\geqslant 0}$ и представляется в виде*

$$Y_s = s\mathbb{1}_{\{s<\overline{X}_\infty\}} + X_\infty \mathbb{1}_{\{s\geqslant \overline{X}_\infty\}}.$$

В частности, $Y_\infty = X_\infty$ и $\overline{Y}_\infty = \overline{X}_\infty$.

Предложение 2 *Пусть W и L — случайные величины на некотором вероятностном пространстве $(\Omega, \mathscr{F}, \mathsf{P})$, $W \geqslant \max\{L, 0\}$ и функция $s \rightsquigarrow \mathsf{E}\big[s\mathbb{1}_{\{s<W\}} + L\mathbb{1}_{\{s\geqslant W\}}\big]$, $s \geqslant 0$, равна 0 при $s = 0$ и монотонно не убывает по s. Определим $\mathscr{F}_s$ как σ-алгебру подмножеств из $\mathscr{F}$, пересечение которых с множеством $\{W > s\}$ либо пусто, либо совпадает с $\{W > s\}$. Положим*

$$Y_s = s\mathbb{1}_{\{s<W\}} + L\mathbb{1}_{\{s\geqslant W\}}. \tag{1}$$

Тогда $Y = (Y_s)_{s\geqslant 0}$ — $(\mathscr{F}_s)$-субмартингал.

Из предложений 1 и 2 вытекают ответы на сформулированнык выше два вопроса. Для того, чтобы для вероятностной меры $\mu = \mu(dx, dy)$ на $\mathbb{R}^2$ с носителем в множестве $\{(x, y)\colon y \geqslant \max\{x, 0\}\}$ нашелся такой процесс X из $\mathscr{X}$, что $\mu = \mathrm{Law}(X_\infty, \overline{X}_\infty)$, необходимо и достаточно, чтобы функция

$$s \rightsquigarrow \int \big[s\mathbb{1}_{\{y>s\}} + x\mathbb{1}_{\{y\leqslant s\}}\big]\, \mu(dx, dy), \quad s \geqslant 0,$$

была равна 0 при $s = 0$ и монотонно не убывала по s. Для каждой такой меры μ мы можем построить "простой" субмартингал Y вида (1), для которого $\mathrm{Law}(Y_\infty, \overline{Y}_\infty) = \mu$. Если теперь вложить субмартингал Y в броуновское движение с помощью замены времени, состоящей из минимальных моментов остановки, пользуясь теоремой Монро или ее обобщениями, то можно определить некоторым образом непрерывный мартингал X и обосновать, что $\mathrm{Law}(X_\infty, \overline{X}_\infty) = \mu$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Rogers L.C.G.* The joint law of the maximum and terminal value of a martingale, Probab. Theory Relat. Fields, 1993, vol. 95, № 4, pp. 451–466.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 19-11-00290).