

Кудрявцев О.Е. (Ростов-на-Дону, Россия). **О подходах к вычислению цен опционов типа lookback европейского и американского стиля.**

Опционы lookback представляют собой “экзотические” деривативы, выплата по которым зависит от экстремума цены базового актива, достигаемого в течении срока жизни опциона. Оцениванием опционов lookback в различных моделях занимался целый ряд исследователей. Наиболее эффективные подходы - это методы, использующие интегральные преобразования (напр., [1,3]). Мы сосредоточимся на классе моделей Леви, популярных среди практиков в области финансов. С одной стороны, процессы Леви включают знаменитую модель Блэка-Шоулза, а с другой – могут допускать скачки.

С практической точки зрения, трейдеру необходимо оценивать опционы lookback не только в начальный момент времени, но и в течение всего срока действия опциона. Пусть $S_t = e^{X_t}$ – цена базового актива, управляемого экспоненциальной моделью Леви. Тогда в момент T_1 цена европейского опциона lookback с датой истечения срока T_2 , зависящая от $X_{T_1} = x$ и экстремума цены базового актива, наблюдаемого до T_1 , может рассматриваться как сезонный опцион lookback сроком действия $T = T_2 - T_1$ с предопределенным максимумом или минимумом. Напомним, что цены на сезонный европейский опцион lookback с плавающей (фиксированной) ценой исполнения с заданным максимумом $U = e^y$ (минимумом $D = e^z$) можно выразить следующим образом.

$$V_{\text{max}}(T, x, y) = E^x [e^{-rT} (e^{\max\{\bar{X}_T, y\}} - e^{X_T})], \quad V_{\text{min}}(T, x, z) = E^x [e^{-rT} (K - e^{\min\{X_T, z\}})_+],$$

где K – цена исполнения, \bar{X}_t и X_t – процессы супремума и инфимума. Оба вида опционов могут быть оценены путем непосредственного применения обобщенного метода Монте-Карло, основанного на факторизации Винера-Хопфа, [4]. Численные эксперименты показывают, что указанный метод для опционов lookback в моделях Леви является достаточно быстрым и точным по сравнению с методами из [1,3].

Вторая часть доклада посвящена методам конечных разностей, позволяющим оценивать американские опционы lookback в рамках модели Блэка-Шоулза. В отличие от европейских опционов lookback, американские опционы lookback не могут быть оценены по явным формулам даже в модели Блэка-Шоулза, и требуют использования численных методов. Цена американского опциона с плавающей ценой исполнения на акцию с выплатой дивидендов может быть представлена как решение U следующего вариационного неравенства (см. [2]):

$$\begin{cases} \max \left(e^y - e^x, \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + (r - q - \frac{\sigma^2}{2}) \frac{\partial U}{\partial x} - rU \right) = 0 & t < T, x < y, \\ \frac{\partial U}{\partial y}(t, x, x) = 0, \\ U(T, x, y) = e^y - e^x, x \leq y, \end{cases}$$

где r – процентная ставка, а q – ставка по дивидендам. Основная идея нового подхода состоит в том, чтобы сократить на единицу размерность задачи, используя следующее представление цены $U(t, x, y) = e^y - e^x + e^y F(t, x - y)$, при $x \leq y$, где $F(t, x) \geq 0$ при $x \leq 0$. Мы применяем метод Винера-Хопфа, чтобы доказать, что функция F не убывает по x на отрицательной полуоси.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Boyarchenko S.I., Levendorskiĭ S.Z.* Efficient Laplace inversion, Wiener-Hopf factorization and pricing lookbacks, International Journal of Theoretical and Applied Finance, 2013, vol. 16, № 3, 1350011.
2. *Dai M., Kwok Y.K.* American options with lookback payoff, Siam J. Appl. Math., 2005, vol. 66, , № 1, pp. 2061–227.
3. *Kudryavtsev O., Levendorskiĭ S.* Efficient pricing options with barrier and lookback features under Lévy processes. Working paper, 2011, 29 pp.
4. *Кудрявцев О.Е.* Приближенная факторизация Винера-Хопфа и методы Монте-Карло для процессов Леви, Теория вероятностей и ее применения, 2019, vol. 64, № 2, pp. 228–257.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант 18-01-00910).