

Ширяева Л.К. (Самарский государственный экономический университет, Россия). **О повернутых версиях трехпараметрической копулы Граббса.**

Рассмотрим статистики Граббса $T_{n,(1)} = (\bar{X} - \min\{X_i\})/S$ и $T_n^{(1)} = (\max\{X_i\} - \bar{X})/S$, вычисленные по нормально распределенной выборке объема n (см.[1]). Пусть в выборке $\{X_i\}_{i=1}^n$ имеется одно аномальное наблюдение (выброс), чей номер неизвестен. Предположим, что выброс отличается от остальных наблюдений параметрами сдвига α и масштаба $\nu > 0$. Обозначим $G_{n,(1)}(t; \alpha, \nu) = P(T_{n,(1)} < t)$, $G_n^{(1)}(t; \alpha, \nu) = P(T_n^{(1)} < t)$, $\Upsilon_n(x, y; \alpha, \nu) = P(T_{n,(1)} < x, T_n^{(1)} < y)$. Рекурсивные соотношения для $G_{n,(1)}(\cdot)$, $G_n^{(1)}(\cdot)$ и $\Upsilon_n(\cdot)$ найдены в [2]. Согласно теореме Склара [3] копула C^{Gr} , извлеченная из распределения Υ_n , имеет вид $C^{Gr}(G_{n,(1)}(x; \alpha, \nu), G_n^{(1)}(y; \alpha, \nu); n, \alpha, \nu) = \Upsilon_n(x, y; \alpha, \nu)$.

Копула Граббса описывает отрицательные взаимозависимости между случайными величинами. Для моделирования положительных взаимозависимостей можно использовать повернутые на 90° и 270° версии этой копулы, т.е. $C_{90}^{Gr}(u, v; n, \alpha, \nu) = v - C^{Gr}(1 - u, v; n, \alpha, \nu)$ и $C_{270}^{Gr}(u, v; n, \alpha, \nu) = u - C^{Gr}(u, 1 - v; n, \alpha, \nu)$. Следующая теорема описывает свойства повернутых версий копулы Граббса.

Теорема 1. Пусть $\Xi_n^{(90)} = \{0 \leq u \leq 1; \delta_n(1 - u; \alpha, \nu) \leq v \leq 1\}$, $\Xi_n^{(270)} = \{0 \leq u \leq 1; 0 \leq v \leq 1 - \delta_n(u; \alpha, \nu)\}$ и $M(u, v) = \min(u, v)$ – максимальная копула. Тогда для $n \geq 3$ $C_{90}^{Gr}(u, v; n, \alpha, \nu) = M(u, v)$, $\forall (u, v) \in \Xi_n^{(90)}$; $C_{270}^{Gr}(u, v; n) = M(u, v)$, $\forall (u, v) \in \Xi_n^{(270)}$, где $\delta_n(u; \alpha, \nu) = G_n^{(1)}(\theta_n(\phi_{n,(1)}(u, v; n, \alpha, \nu)))$ и $\phi_{n,(1)}(\cdot)$ – функция, обратная $G_{n,(1)}(\cdot)$.

Следствие. В случае $n = 3$ для $\forall \alpha$ и $\nu > 0$ справедливо утверждение $C_{90}^{Gr}(u, v; 3, \alpha, \nu) = C_{270}^{Gr}(u, v; 3, \alpha, \nu) = M(u, v)$, $\forall (u, v) \in [0, 1]^2$.

В работе также доказывается

Лемма. Пусть статистики $T_{3,(1)}$ и $T_3^{(1)}$ вычислены по набору непрерывных случайных величин X_1, X_2, X_3 с произвольным распределением. Тогда копула, описывающая совместное распределение $T_{3,(1)}$ и $T_3^{(1)}$, является минимальной, а повернутые на 90° и 270° ее версии совпадают с максимальной копулой.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Grubbs F.E.* Sample criteria for testing outlying observations. Ann.Math. Statist., 1950, V.21, N 1, p. 27–58.
2. *Ширяева Л.К.* О распределении статистик Граббса в случае нормальной выборки с выбросом. Изв. вузов. Матем., 2017, № 4, с. 84–101; англ. пер.: *Shiryayeva L. K.* On distribution of Grubbs' statistics in case of normal sample with outlier. Russian Math. (Iz. VUZ), 2017, V.61, N.4, p. 72–88.
3. *Nelsen R.B.* An Introduction to Copulas, Springer, New York, 2006.